# 半参数模型及其在测量数据处理中的应用研究

# Research on Semiparametric Model and Its Application in Surveying Data Processing

张建帅[1] 陈艳红[2]

Jianshuai Zhang[1] Yanhong Chen[2]

1. 南京维景数据工程有限公司 中国·江苏 南京 210000
2. 盐城市勘察测绘院 中国·江苏 盐城 224002

1.Nanjing Weijing Data Engineering Co., Ltd., Nanjing, Jiangsu, 210000, China
2.Yancheng Institute of Surveying and Mapping, Yancheng, Jiangsu, 224002, China

**摘　要：** 半参数模型是在传统参数模型中参数分量估计的基础上，加入了可视为系统误差的非参数分量估计，它比传统的参数模型和非参数模型具有更好的适用性和说服力。论文研究了补偿最小二乘法则下正则矩阵 $R$ 及光滑参数 $\alpha$ 的确定原则和方法，对半参数模型的研究具有理论意义和应用价值。

**Abstract:** The semiparametric model is based on the estimation of the parametric components in the traditional parametric model, and adds the estimation of the non-parametric components which can be regarded as systematic errors, it has better applicability and persuasiveness than the traditional parametric and non-parametric models. The paper studies the determination principle and method of regular matrix and smooth parameters under the compensating least squares method, which has theoretical significance and application value for the study of semiparametric model.

**关键词：** 半参数模型；补偿最小二乘估计；正则矩阵；光滑参数

**Keywords:** semiparametric model; penalized least squares estimation; regularize matrix; smoothing parameter

**DOI:** 10.12346/se.v3i4.6353

## 1 半参数模型概述

在传统测量数据处理理论中，参数模型和非参数模型都有各自的优点和缺点。在实际测量数据处理中，传统模型不能完全解决所有误差问题，因此有人提出了半参数模型，这种模型弥补了非参数模型的缺陷，而且保持了参数模型的优点，其一般形式为：

$$L = BX + S + \Delta \tag{1}$$

上式中，$BX$ 为参数部分即线性部分，是观测量的主要影响项，$X$ 是参数向量，$S$ 是指系统误差的非参数向量，而 $\Delta$ 则是指随机误差向量。如果 $B=0$，那么该模型就变成了非参数模型，如果 $S=0$，那么该模型就是传统的参数模型。由此可知，半参数模型是一种混合了参数模型和非参数模型的新模型，它的主要任务是根据观测数据 $L$ 去估计未知参数 $X$ 以及参数 $S$。

## 2 半参数模型的解算

根据半参数模型的误差方程，其中含有 n+t 个未知参数，但是方程的个数却有 n 个，那么由传统的最小二乘原理无法取得方程的唯一解，即参数分量和非参数分量不能完全确定。鉴于此，有人提出了补偿最小二乘法，该法与传统最小二乘法的区别是引入了正则矩阵和光滑因子，也有文献称之为正规化矩阵和平滑参数，补偿最小二乘法的平差准则为：

$$V^T PV + \alpha \hat{S}^T RS = \min \tag{2}$$

其中，$\alpha$ 是一个事先确定的极小化参数，在整个平差过

【作者简介】张建帅（1982-），男，中国河南灵宝人，工程师，从事大地测量与测量工程研究。

程中对 V 和 S 起平衡作用，也就是前述的光滑参数；而 R 则是一个事先给定的正定矩阵，也就是前述的正则矩阵，目前的研究普遍认为它是模型中非参数分量的函数，二次型 $\hat{S}^T RS$ 则是关于向量 $\hat{S}$ 的一种度量函数，在确定了两个参数之后，就可以根据最小二乘原理进行模型求解了。正则矩阵 $R$ 和光滑参数 $\alpha$，它们不仅决定了解的大小，也决定了补偿最小二乘法中的法方程是否有解。但是目前为止，对它们的实际意义尚不完全清楚。

目前，在半参数模型补偿最小二乘法平差过程中，如何确定正则矩阵 $R$ 和光滑参数 $\alpha$，是一个值得进一步研究的课题。

## 3 正则矩阵及光滑参数的确定

正则矩阵 $R$ 描述了半参数模型中补偿最小二乘法的非参数分量，由于实际平差过程中，非参数分量是待定量，那么只能事先确定正规矩阵 $R$，目前常用的确定方法有自然样条函数法、距离法、时间序列法、间隔时间法、配置模型确定法，各方法有各自的适用条件，实际应用中应首先评估前提条件。

如果观测值是在时刻 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 得到的一个时间序列，则有理由认为相邻时刻的系统误差 $s_i$ 与 $s_{i+1}$ 的差别不会太大，可令 $\hat{S}^T RS$ 为相邻两观测点模型误差之差的平方和而得到正则矩阵 R，即：

$$\hat{S}^T RS = \sum_{i=1}^{n-1} (\hat{s}_{i+1} + s_i)^2$$

或令 $\hat{S}^T RS$ 为相邻三观测点模型误差之差的平方和而得到正则矩阵 R，即：

$$\hat{S}^T RS = \sum_{i=2}^{n-1} (\frac{\hat{s}_{i-1} + s_{i+1}}{2} - \hat{s}_i)^2$$

这就是时间序列法。

在正则矩阵 R 确定后，光滑参数 $\alpha$ 的选择对后续各未知量参数的确定有很重要的影响。半参数模型中确定光滑参数 $\alpha$ 的方法大多数都是从非参数模型借鉴而来的，主要有交叉核实法（CV）、广义交叉核实法（GCV）、L 曲线法、信噪比值法、控制法、效率法、遗传算法等，与正则矩阵 $R$ 的确定方法一样，实际应用中应首先评估前提条件。

L 曲线法是根据光滑参数 $\alpha$ 的信号范数和噪声范数得来的，该法首先定义了一条曲线 $L(sn(\alpha), vn(\alpha)) = L(\alpha)$，信号范数和噪声范数分别对应于曲线的横坐标及纵坐标，由于 $L(sn(\alpha), vn(\alpha))$ 所确定的 L 曲线是一条下凸的，单调递减的曲线，形似字母 L，故被称为 L 曲线。

L 曲线形象地反映了参数 $\alpha$ 的意义，在 $\alpha\hat{S}^T RS + V^T PV =$ min 所确定的极小化平差过程中，曲线的右下部分主要受 $\hat{S}^T RS$ 影响，而曲线的左上部分主要受 $V^T PV$ 影响。L 曲线所要寻找的 $\alpha$ 值就是使得信号范数和噪声范数取得平衡的 $\alpha$ 值，通常选择曲线上的两个特殊拐点，一个是 L 曲线上距离原点最近的点，此点对应的 $\alpha$ 值记为 $\alpha_D$，另外一个点则是 L 曲线上曲率最大的点，对应的 $\alpha$ 值记为 $\alpha_K$。L 曲线所要寻找的 $\alpha$ 值就是使得信号范数和噪声范数取得平衡的 $\alpha$ 值，即使系统误差和随机误差取得平衡的 $\alpha$ 值。在实际计算中发现，依照上面的方法得到的 $\alpha_D$，$\alpha_K$，它们都是满足平衡条件的 $\alpha$ 值，相差一般不大，可任取一值作为最合适的 $\alpha$ 值。实际上，取 [ $\alpha_D$，$\alpha_K$ ] 之内的 $\alpha$ 值都可以满足要求，也就是说，L 曲线法确定的不是固定的 $\alpha$ 值，而是一个 $\alpha$ 值区域，这是 L 曲线法与广义交叉核实法的主要区别。

基于数据挑选的交叉核实法的基本思路来源于回归预测思想，首先选取 $\alpha$ 并剔除一个预测点，用其余的观测点得到一个拟合曲线，用该曲线对其余的观测值逐个进行预测，使所有预测值的均方误差为最小。一般都是将 $(t_i, L_i)$ 作为预测点（即去掉此点），而利用剩下的 $n-1$ 个点作曲线拟合，再将预测点 $(t_i, L_i)$ 代入所得的拟合曲线，从而可以得到该点的预测值 $\hat{L}_\alpha^{-i}(t_i)$。令 $CV(\alpha) = \frac{1}{n}\left(L_i - \hat{L}_\alpha^{-i}(t_i)\right)^2$，使该式最小的 $\alpha$ 值就是最合适的 $\alpha$ 值。

另外，交叉核实法需要剔除一个观测值再对其余所有的观测值进行曲线拟合预测，在实际计算中这需要很大的运算量，由于需要寻找合适的 $\alpha$ 值，则必须得进行无数次这样的循环运算，这就严重限制了交叉核实法的应用效果，因此实际计算时一般都选择采用广义交叉核实法，即简化部分参数以减小计算量。

## 4 实例分析

以某大坝的变形监测数据分析为例，设 $L$ 为变形监测的位移值，$t_1$、$t_2$、$t_3$、$t_4$、$t_5$ 为坝段各层面的温度，$h$ 为水位，$\theta$ 为时效因子，首先采用逐步回归来处理监测数据，对 h，$h^2$，$h^3$，$h^4$，$t_1$，$t_2$，$t_3$，$t_4$，$t_5$，$\theta$ 进行逐步回归，最终得到的回归模型为：

$$y = -7.147 - 1.421\times10^{-9} h^4 + 3.562\theta - 3.717\ln\theta - 0.132t_1 \\ -0.138t_3 + 1.062t_4 \qquad (3)$$

采用半参数模型，观测方程为式（1），其中 $X = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6]^T$ 表示温度、水位与位移值之间函数关系明确的部分，S 表示温度、水位与位移值之间函数关系不明确的部分，$\Delta$ 表示随机误差，系数矩阵 B 取温度、水位标

准化以后的数据$\left[T_1 \quad T_2 \quad T_3 \quad T_4 \quad T_5 \quad H\right]$。

由于温度、水位主要随时间而变化，因此采用时间序列法确定正则矩阵$R$，而光滑参数$\alpha$的确定，主要采用前述的 L 曲线法，辅以$GCV(\alpha)$法进行比较。

当$\alpha$ =1.23 时，$L_{\alpha d}$最小值为 57.467；当$\alpha$ =0.92 时，$L_{\alpha k}$最大值为 0.100；当$\alpha$ =2.88 时，$GCV(\alpha)$最小值为 1.074。取$\alpha$ =1.23，可解得参数分量$x=\left[-0.1780 \quad -0.0510 \quad -0.1841 \quad 0.4596 \quad 0.6443 \quad -0.4167\right]^T$。

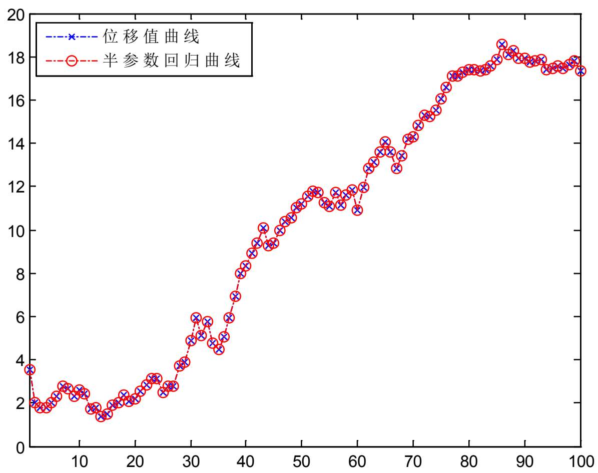


**图 1 位移值曲线及半参数回归曲线**

上图是实际位移曲线和模型解算后回归曲线的综合图，由图可知，两条曲线重合得很好，这充分说明了半参数模型解算后的良好回归效果，由于综合考虑了非参数向量的系统误差和参数向量的随机误差，使得半参数模型在数据处理过程中，可以很好的提取变形的趋势项与周期项。

## 5 结语

根据实例分析，可以总结出正则矩阵 R、光滑参数$\alpha$的性质和选取原则：

①正则矩阵 R 主要决定了补偿二乘法中的法方程是否有解，它的大小对解算结果几乎没有影响。如果观测值是时间序列的函数或与时间序列相关时，应当采用时间序列法是确定正则矩阵 R，如果观测值是坐标值或与空间因素相关时，应当采用距离法来确定正则矩阵 R。

②光滑参数$\alpha$主要决定了系统误差估计值的质量。实际计算中发现根据 L 曲线最短距离法和最大曲率法确定的$\alpha$值相差不大，而$GCV(\alpha)$最小法确定的$\alpha$值相对来说就比较大，这主要是由$GCV(\alpha)$和 L 曲线法的思想不同所决定的。光滑参数$\alpha$的主要作用是：决定补偿最小二乘法中解的大小；决定系统误差元素间的连续性。

③在一定条件下，可以认为正则矩阵 R 是系统误差测量学意义下的权阵，而$\alpha$则是所求的参数改正值与系统误差的权比。

## 参考文献

[1] 王振杰,欧吉坤.用L-曲线法确定半参数模型中的平滑因子[J].武汉大学学报(信息科学版),2004,29(7):651-653.

[2] 丁士俊,陶本藻.半参数回归与平差模型[J].大地测量与地球动力学,2003,23(4):111-114.