“以退求进”解题策略巧解高考数学试题例析

An Example Analysis of Cleverly Solving Mathematics Test Questions in the College Entrance Examination

张利拉

Lila Zhang

扬州大学　中国·江苏 扬州 225002

Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu, 225002, China

摘　要：解数学题，需要有正确的思路，很多数学问题，通常都可以采用正面求解的思路。但是，如果正面求解遇到障碍，停滞不前时，则需要改变思考的方向，“退一步”进行思考，从而使问题得到解决。这是一种很重要的解题思想，我们不妨称它为“以退求进”思想。“以退求进”，退到特殊情况、退到已知条件、退到摸清规律、退到猜出结果等，而以退为进，将问题具体化、简单化，以简单的、特殊的情况寻找解题突破口。

Abstract: Solving math problems requires correct thinking, many math problems can usually be solved positively. However, if the frontal solution encounters obstacles and stagnates, it is necessary to change the direction of thinking and “take a step back” to think so that the problem can be solved. This is a very important problem-solving thought, and we might as well call it the thought of “retreat for advancement”. “Retreat for advancement”, retreat to special circumstances, retreat to known conditions, retreat to find out the law, retreat to guess the result, etc., and retreat to advance, concretize and simplify the problem, and use simple and special looking for a breakthrough in solving the problem.

关键词：以退为进；高考数学；解题方法

Keywords: retreat as progress; college entrance examination mathematics; problem-solving method

基金项目：中国博士后科学基金（项目编号：2015T80589）；扬州大学本科专业品牌建设与提升工程项目（项目编号：ZYPP2018B007）。

DOI: 10.12346/sde.v4i3.6006

1 引言

随着人们对于教育质量提出了更高的要求，更加注重学生核心素养的培养，高中又是学生整个学习生涯重要的阶段。在学习的过程中，教师应该渗透更多的解题思路。以退为进作为一种重要的解题思路，对于这种方法的探讨势在必行。

2 由结论退到条件

数学问题一般由条件和结论两部分构成，解题就是从已知条件出发，去求未知的结论，以退为进的思想却是从结论向条件后退，从未知的结论出发寻求需知，由需知一直追溯到可知或者已知，问题就能反过去得出答案[1]。

例 1（2020 高考天津）：已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}$，若函数 $g(x)=f(x)-\left|kx^2-2x\right|$（$k\in\mathbb{R}$）恰有 4 个零点，则 k 的取值范围是（　　）

A. $\left(-\infty,\ -\frac{1}{2}\right)\cup\left(2\sqrt{2},\ +\infty\right)$

B. $\left(-\infty,\ -\frac{1}{2}\right)\cup\left(0,\ 2\sqrt{2}\right)$

C. $\left(-\infty,\ 0\right)\cup\left(0,\ 2\right)$

D. $\left(-\infty,\ 0\right)\cup\left(2\sqrt{2},\ +\infty\right)$

【分析】这种高考题常见，一般题中函数都不是我们常

【作者简介】张利拉（1998-），女，中国贵州仁怀人，硕士，从事中学数学研究。

见的函数，所以求解起来就需要一定的技巧，通常我们不用去考察整体的函数，只需要根据所需结果，将结果一步步倒退，把函数转化为熟悉的初等函数或者初等函数的组合形式，我们做起来就会得心应手了。

此题比较注意到$g(0)=0$，所以要使$g(x)$恰有 4 个零点，只需方程$|kx-2|=\frac{f(x)}{|x|}$恰有 3 个实根即可，令$h(x)=\frac{f(x)}{|x|}$，即$y=|kx-2|$与$h(x)=\frac{f(x)}{|x|}$的图像有 3 个不同交点即可。因为$\frac{f(x)}{|x|}=\begin{cases}x^2, & x\geq 0\\ 1, & x<0\end{cases}$，问题就能解决。

3 由陌生退到熟悉

高考题一般较陌生，当我们遇到陌生的题目时，不妨可通过发散式思维或等价变换，寻找与熟知、熟题、熟法相近之处，然后驾轻就熟，迅速解答 [2]。

例 2(2018• 上海 •T4)：设常数 a ∈ R，函数 $f(x)=\log_2(x+a)$。若 f(x) 的反函数的图像经过点 (3，1)，则 a=____。

【分析】因为需要求解反函数比较麻烦，所以我们根据互为反函数的性质：互为反函数的函数图像关于直线 y=x 对称，所以函数 $f(x)=\log^2(x+a)$ 的图像经过点 (1,3)，所以 $3=\log^2(1+a)$，即 $1+a=2^3$，解得 a=7。这样就可以迅速把问题熟悉化，既保证了正确率又提高了解题速度。

4 由抽象退到具体

例 3(2018• 全国 2• 理 T11 文 T12)：已知 f(x) 是定义域为 (- ∞，+ ∞) 的奇函数，满足 f(1-x)=f(1+x)，若 f(1)=2，则 f(1)+f(2)+f(3)+⋯+f(50)=(　　)

A.-50　　B.0　　C.2　　D.50

【分析】该题考察函数的奇偶性，对称性及其周期性，利用常规方法求解也并不复杂，但如果我们能把函数具体化，强化条件，确可以“秒杀”该问题。

【解析】常规解答：因为 f (−x) =f (2+x) =−f (x)，所以 f (x+4) =f[(x+2) +2]=−f (x+2) =f (x) . 所以 f (x) 的周期为 4。因为 f (x) 为奇函数，所以 f (0) =0. 因为 f (2) =f (1+1) =f (1−1) =f (0) =0，f (3) =f (−1) =−f (1) =−2f (4) =f (0)。f (1) +f (2) +f (3) +f (4) =0，所以 f (1) +f (2) +...+f (50) =f (49) +f (50) =f (1) +f (2) =2。

快速解答：注意到函数关于（0，0）和直线 x=1 对称，构造函数$f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$，符合所有题干条件。由此再求即可得到答案。

5 由一般退到特殊

由于共性寓于事物的个性之中，对于有些较复杂的问题，当从一般角度难以入手或解决时，从一般退到特殊，把“无数”改为“某个”，利于思考。我们不妨先通过考察和研究它的特殊情况，去探求发现解题规律和解题方法。

例 4：数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_{m+n}=a_m+a_n$，若$a_{k+1}+a_{k+2}+\ldots+a_{k+10}=2^{15}+2^5$，则 k 为（　　）

A.2　　B.3　　C.4　　D.5

【分析】由于 m 的不确定性，由于 m 取值一般都是满足的，所以我们把 m 取为特殊值，取$m=1$，可得出数列$\{a_n\}$是等比数列，求得数列$\{a_n\}$的通项公式，利用等比数列求和公式可得出关于 k 的等式，就可求得 k 的值 [3]。

例 5(2017• 山东 • 理 T7)：若 a ＞ b ＞ 0，且 ab=1，则下列不等式成立的是 (　　)

A. $a+\frac{1}{b}<\frac{b}{2^a}<\log_2(a+b)$

B. $\frac{b}{2^a}<\log_2(a+b)<a+\frac{1}{b}$

C. $a+\frac{1}{b}<\log_2(a+b)<\frac{b}{2^a}$

D. $\log_2(a+b)<a+\frac{1}{b}<\frac{b}{2^a}$

【分析】由于啊 a，b 的不确定性，如果要考察$\log_2(a+b)$，$a+\frac{1}{b}$，$\frac{b}{2^a}$的图像情况不好入手，既然一般的满足 ab=1 条件的数都满足，我们就把 a 和 b 特殊化，就可以很快得出结果。保证速度也保证正确率。

【解析】不妨令 a=2，b=$\frac{1}{2}$，则 a+$\frac{1}{b}$=4，$\frac{b}{2^a}=\frac{1}{8}$，$\log_2(a+b)=\log_2\frac{5}{2}\in(\log_2 2，\log_2 4)=(1，2)$，即 $\frac{b}{2^a}<\log_2(a+b)<a+\frac{1}{b}$。

6 结语

“以退求进”的思维模式是指对某些数学问题，先退一步，甚至几步，考虑一些更简单、更特殊的情况，从中悟出一些道理进而发现一个解决问题的最优途径。这意味着，如果在日常的解题训练过程中，能够经常有目的、有意识地学会“退”，则必能“量变而质变”地逐步形成“会退”的能力，进而提升解题能力。

参考文献

[1] 刘玉英.数学问题解决策略的思考[J].学周刊,2013(10):100-101.

[2] 李国泰.“以退求进”法——解数学题的一种策略[J].中学数学教学参考,1994(Z2):27-28.

[3] 舒飞跃.退一步海阔天空——数学解题的重要思想方法[J].中国数学教育,2011(8):40-41.