函数模型在高考题中的应用

Application of Function Model in the Questions of College Entrance Examination

吴姝琪

Shuqi Wu

扬州大学数学科学学院　中国·江苏 扬州 225002

School of Mathematics and Science, Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu, 225002, China

摘　要：函数是贯穿高中学习的一条主线，掌握好函数模型在高考解题中的应用十分重要，论文简要叙述了函数模型的概念以及类型和此类高考题解题思路，随后例析了函数模型在高考应用题中的使用，旨在帮助学生培养数学建模的素养。

Abstract: Function is a main line running through high school learning, it is very important to master the application of function model in solving problems of college entrance examination, this paper briefly describes the concept and type of function model and the idea of solving such problems in college entrance examination, and then analyzes the function model, the use of application questions in the college entrance examination is designed to help students develop the literacy of mathematical modeling.

关键词：函数模型；高考题；应用题

Keywords: function model; college entrance examination questions; application questions

DOI: 10.12346/sde.v4i3.6005

1 引言

函数作为现代数学中最基本的概念，贯穿在高中数学教学之中的同时，也与客观世界紧密联系。对于函数模型来说，它具有一定的工具性、抽象性、针对性，在学生的解题过程中，及时巧妙地运用函数模型，可以达到事半功倍的效果。

在高考题中，从现实世界出发进行命题的题目越来越多，旨在培养学生能够用数学的眼光观察世界，用数学思维思考世界，用数学语言表达世界[1]。应用函数模型以及相关数学知识解决高考应用题，有助于培养学生将数学与实际生活相联系的能力，激发他们的创造力。

2 函数模型概述

函数刻画了客观世界变量的对应关系和规律，可以解决现实中的许多问题。

函数模型一般是将 y 表达成 x 的函数，形如 $y=f(x)$。在高考题中常见的函数模型主要有一下几种：形如 $y=ax+b(a\neq 0)$ 的一次函数模型，具体应用在两个变量之间是正比例关系的题目中，如求行程的题目；形如 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的二次函数模型，主要应用于求最值的题型中；在求利率等应用题中多建立形如 $y=ba^x+k$（a、b、k 为常数，$a>0$ 且 $a\neq 1$）的指数函数模型；形如 $y=m\log_a{}^x+n$（m、n、a 为常数，$m\neq 0$，$a>0$ 且 $a\neq 1$）的对数函数模型，通常应用于航天问题；分段函数模型常用于解最优解问题[2]。不同的函数模型可以解决不同的现实问题，根据题目情境、条件及隐藏信息建立模型求解[1]。

利用函数模型在解决高考应用题中，我们通常分为以下几步：

①分析问题：首先分析题目，从现实的背景中抽象出数学条件以及所需要解决的问题，用数学语言简化分析。

②建立模型：根据分析的数学条件、数量关系等，建立适合的函数模型。

③求解模型：根据数学知识及所建立函数模型的性质和图像，进行求解。

④检验结果：将所得的解带回实际问题中，判断是否符合逻辑或是否能够很好解决实际问题[3]。

【作者简介】吴姝琪（1998-），女，中国福建龙岩人，硕士，从事中学数学研究。

3 函数模型解题例析

下面举例谈谈函数模型在高考题中的应用。

示例 1（2020 年江苏）：某地准备在山谷中建一座桥梁，桥址位置的竖直截面图如图 1 所示：谷底 O 在水平线 MN 上，桥 AB 与 MN 平行，OO' 为铅垂线 (O' 在 AB 上). 经测量，左侧曲线 AO 上任一点 D 到 MN 的距离 h_1（米）与 D 到 OO' 的距离 a(米) 之间满足关系式 $h_1=\frac{1}{40}a^2$；右侧曲线 BO 上任一点 F 到 MN 的距离 h_2（米）与 F 到 OO' 的距离 b(米) 之间满足关系式 $h_2=-\frac{1}{800}b^3+6b$. 已知点 B 到 OO' 的距离为 40 米。

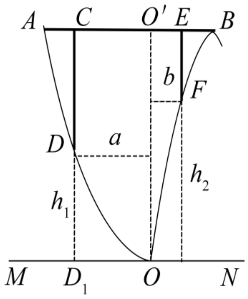

图 1

（Ⅰ）求桥 AB 的长度；

（Ⅱ）计划在谷底两侧建造平行于 OO' 的桥墩 CD 和 EF，且 CE 为 80 米，其中 C,E 在 AB 上（不包括端点）。桥墩 EF 每米造价 k(万元)、桥墩 CD 每米造价 $\frac{3}{2}k$（万元）。问 $O'E$ 为多少米时，桥墩 CD 与 EF 的总造价最低?

利用函数模型思想解题时的思路为以下步骤：

①分析问题：由题干得 $AB//MN$、AO 曲线和 BO 曲线上的点的函数关系式以及 $O'B=40$。第（Ⅰ）问，由图可以得到 $AB=AO'+O'B$，$O'B$ 已知，则只需求出 AO'，过 A 点做垂线交 MN 于点 A'，过 B 点做垂线交 MN 于点 B'，可以知道 $AA'=BB'$，又 A 和 B 都分别在 AO、BO 曲线上，关系式已知，考虑通过高度相同列方程求解。第（Ⅱ）问，总造价 =EF 造价 +CD 造价 = $k\cdot EF+\frac{3}{2}k\cdot CD$，不妨设 $O'E=x$，$O'E$ 可以看作曲线上的点 F 到 OO' 的距离，则 EF 与 $O'E$ 满足 $EF=OO'-(-\frac{1}{800}x^3+6x)$，$CO'$ 可以看作曲线上的点 D 到 OO' 的距离，$CO'=CE-O'E$，则 CD 与 $O'E$ 满足 $CD=OO'-\frac{1}{40}(80-x)^2$，那么总造价便随着 x 的变化而变化，从而考虑建立函数模型解题。

②建模型：第（Ⅰ）问根据 A,B 高度一致列方程求得 $AB=120$，这里便不再赘述。

第（Ⅱ）问，设 $O'E=x$，总造价为 $f(x)$，则 $CO'=CE-O'E=80-x$，又因为 $0<x<O'B=40$ 且 $0<80-x<AB-O'B=80$，则 $0<x<40$。$EF=h-(-\frac{1}{800}x^3+6x)$，$CD=OO'-\frac{1}{40}(80-x)^2$，由此建立函数模型：

$$f(x)=k\cdot EF+\frac{3}{2}k\cdot CD=k\left[160-(-\frac{1}{800}x^3+6x)\right]+\frac{3}{2}k\left[160-\frac{1}{40}(80-x)^2\right]=k(\frac{1}{800}x^3-\frac{3}{80}x^2+160)$$

③求解模型：求最值，通常利用导数的知识求解，因此对 $f(x)$ 求导有 $f'(x)=k(\frac{3}{800}x^2-\frac{3}{40}x)=\frac{3k}{800}x(x-20)$，当 $f'(x)=0$ 时，$x=20$ 或 $x=0$（舍去）。

当 $0<x<20$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $20<x<40$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增。

则当 $x=20$ 时，$f(x)$ 取最小值，造价最低。

④检验结果：此函数模型解决了问题并且结果符合现实逻辑背景 [2]。

示例 2（2018 年上海）某群体的人均通勤时间，是指单日内该群体中成员从居住地到工作地的平均用时，某地上班族 S 中的成员仅以自驾或公交方式通勤，分析显示：当 S 中 $x\%$ $(0<x<100)$ 的成员自驾时，自驾群体的人均通勤时间为 $f(x)=\begin{cases}30,0<x\le 30,\\ 2x+\frac{1800}{x}-90,30<x<100\end{cases}$（单位：分钟），而公交群体的人通勤时间不受 x 影响，恒为 40 分钟，试根据上述分析结果回答下列问题：

（Ⅰ）当 x 在什么范围内时，公交群体的人均通勤时间少于自驾群体的人均通勤时间？

（Ⅱ）求该地上班族 S 的人均通勤时间 g（x）的表达式；讨论 g（x）的单调性，并说明其实际意义。

利用函数模型思想解题时的思路为以下步骤：

①分析问题：从题干出发从“上班族 S 中的成员仅以自驾或公交方式通勤”得到信息，即群体通勤方式 = 自驾通勤 + 公交通勤，其次理解 x 为自驾通勤群体在上班族 S 中的占比，且自驾群体的人均通勤时间随 x 的改变而改变，即题中的分段函数 f（x），公交人均通勤时间恒为 40 分钟。分析第（Ⅰ）问，公交群体的人均通勤时间少于自驾群体的人均通勤时间转化为数学语言即 40 < f（x）时，求解 x 范围；第（Ⅱ）问，求人均通勤时间 g（x），由基本的平均数的概念以及题干得：

$$\text{人均通勤时间}g(x)=\frac{\text{群体通勤时间之和}}{\text{总人数}}$$
$$=\frac{\text{自驾通勤人数}\times\text{自驾人均通勤时间}+\text{公交车通勤人数}\times\text{公交车人均通勤时间}}{\text{总人数}}$$

从自驾人均通勤时间函数f(x)为分段函数考虑构建g(x)为分段函数模型。

②建立模型：第（Ⅰ）问利用一元二次不等式求解即可，这里便不再赘述；

主要针对第（Ⅱ）问构建函数模型：设上班总人数为 n，则自驾通勤人数为 $n\cdot x\%$，公交通勤人数 $n(1-x\%)$。

当 $0<x\le 30$，$g(x)=\frac{n\cdot x\%\cdot 30+n\cdot(1-x\%)\cdot 40}{n}=40-\frac{x}{10}$，

当 $30<x<100$，

$$g(x)=\frac{n\cdot x\%\cdot(2x+\frac{1800}{x}-90)+n\cdot(1-x\%)\cdot 40}{n}=\frac{x^2}{50}-\frac{13}{10}x+58,$$

所以 $g(x)=\begin{cases}40-\dfrac{x}{10},(0<x\le 30)\\ \dfrac{x^2}{50}-\dfrac{13}{10}x+58,(30<x<100)\end{cases}$

③求解模型：讨论 $g(x)$ 的单调性：当 $0<x\le 30$ 时，利用所学过的一次函数 $y=ax+b(a\ne 0)$ 当 $a<0$ 时函数单调递减的知识可以求解出 $g(x)$ 单调递减；当 $0<x\le 30$ 时，二次函数开口向上，其对称轴 $x=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{65}{2}=32.5>0$ ，可以知道 $30<x<32.5$ ，$g(x)$ 单调递减；$32.5<x<100$ ，$g(x)$ 单调递增。其现实意义为当 32.5% 上班族选择自驾时，通勤时间最少，可以节约时间。

④检验结果：在实际背景中，自驾人群占一定比例时，可以很好地利用交通，但当自驾人群超过一定数量的时候，也容易造成交通拥挤，反而增加了通勤时间，所以结果是符合现实逻辑的 [3]。

4 结语

不难发现此类题目的一大特点就是数学条件隐藏在现实背景以及冗长的文字中，因此学生需要耐心，从略读到详读，从题目中去整理和提取所需要的内容。读题时需要格外注意的是量与量之间的关系，这种关系往往就是构建函数模型的突破口。构建好函数模型后，再根据已经掌握的数学知识去进行求解。

函数模型解高考题的本质其实是数学建模思想在高考题中的一种应用，在时代快速发展的大背景下，数学建模作为连接现实世界与数学世界的桥梁显得格外重要。因此，学校以及数学教学团队都需要有意识有目的培养学生的数学建模思想和能力 [3]。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准[M].北京:人民教育出版社,2018.

[2] 胡丽梅.高中函数模型及其应用的教学策略研究[J].高考,2021(5):9-10.

[3] 杨晓蕊.数学建模在高考数学中的应用分析[D].郑州:河南大学,2019.