# 提取正变量　破解疑难点
## ——由一类导数题引发的思考
## Extract Positive Variables and Solve Difficult Points
### —Reflections on a Class of Derivative Problems

王灵灵

Lingling Wang

扬州大学数学科学学院　中国·江苏 扬州 225002

School of Mathematics and Science, Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu, 225002, China

**摘　要：**正变量是指大于 0 的变量。高考导数题中常见的正变量有或三类。第一类正变量往往需要借助题目自带限定范围或者默认定义域（如题目中出现了对数函数）来进行判断。因此，论文把这两类合为一类来进行研究，运用这种方法可以通过快速构造新函数来化繁为简进而解决问题，针对这三种正变量的提取进行例析。

**Abstract:** A positive variable is a variable greater than 0. There are three kinds of positive variables in the derivative questions of college entrance examination. The first kind of positive variables often need to be judged by the limited scope or default domain of the topic (if logarithmic function appears in the topic) . Therefore, this paper combines these two categories into one category for research. Using this method, we can quickly construct new functions to simplify the complexity and solve the problem, and analyze the extraction of these three positive variables.

**关键词：**正变量；构造函数；导数题

**Keywords:** positive variables; constructors; derivative problems

**DOI:** 10.12346/sde.v4i3.6004

## 1 引言

学生在做导数题时，容易被分母上有函数或者含有指数函数的复杂导函数吓退，论文提供了一种化复杂导函数为与它符号相同的简单函数的思路，帮助求解这类导数问题 [1]。

## 2 提取 $x$ 型

例 1：已知 $f(x)=e^x(x^2+mx+m^2)$，$g(x)=ax^2+x+ax\ln x$，设$m=0$，若对任意$x\in(0,+\infty)$，不等式$f(x)\geq g(x)$恒成立，求实数 $a$ 的值。

解：任意 $x\in(0,+\infty)$，$x^2e^x\geq ax^2+x+ax\ln x$，即任意 $x\in(0,+\infty)$，$xe^x\geq ax+1+a\ln x$可推出$xe^x\geq a(x+\ln x)+1=\ln x\,e^x+1$。

令$h(x)=xe^x$，则$h'(x)=(x+1)e^x>0$，$h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，$h(x)>h(0)=0$。再令$t=xe^x$，则$t>0$，问题转化为$\forall t>0$，$t\geq a\ln t+1$ 即$\forall x>0$，$x-a\ln x-1\geq 0$。

若令 $F(x)=x-a\ln x-1$，可知$F(x)_{min}\geq 0$。由$F\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}+a-1\geq 0$，$F'(x)=1-\frac{a}{x}=\frac{x-a}{x}$（$x>0$）可得$a\geq\frac{e-1}{e}$且$F(x)$在$(0,a)$上单调递减，$(a,+\infty)$上单调递增，故$F(x)_{min}=F(a)=a-a\ln a-1\geq 0$。

已知$a\geq\frac{e-1}{e}$，故不等式两边同时除以 $a$，不等号的方向不变，原不等式变为$1-\ln a-\frac{1}{a}\geq 0$。

令$g(x)=1-\ln x-\frac{1}{x}$，$g'(x)=\frac{1-x}{x^2}$，可得$g(x)$在 (0,1) 上

【作者简介】王灵灵（1997-），女，中国山东泰安人，硕士，从事中学数学研究。

单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减。$g(x)_{max}=g(1)=0$，所以$g(x)\leq 0$，又因为$g(x)\geq 0$，可知，$g(x)=0$，$a=1$。

评注：题目两次用到了提取正变量的方法，先将$x^2e^x\geq ax^2+x+ax\ln x$转化为$xe^x\geq ax+1+a\ln x$，后续又将$a-a\ln a-1\geq 0$变为$1-\ln a-\frac{1}{a}\geq 0$。第一步通过提取正变量对不等式两边的函数进行了降幂，便于观察出同构式，减小了解题难度。第二步通过提取正变量将不等式中的每一项都化为了常见函数的形式，降低了后续求导的复杂性[2]。

## 3 提取 $x^2$ 型

例 2：已知函数，讨论函数 $f(x)$ 的单调性。

解: $f(x)$ 的定义域是$(0,+\infty)$，$f'(x)=-\frac{1}{x^2}-1+\frac{a}{x}=-\frac{x^2-ax+1}{x^2}$。

当 $a\leq 0$，$h(x)\leq 0$ 成立，因此 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$上单调递减。

当$0<a\leq 2$，$h(x)\leq 0$，故 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$上单调递减。

当$a>2$，$h(x)$在$\left(0,\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$，$\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty\right)$上小于 0，在$\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$上大于 0。因此，$f(x)$ 在$\left(0,\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$，$\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty\right)$单调递减；在$\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$上单调递增。

综上所示，当$a\leq 2$时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；当 $a>2$ 时，$f(x)$ 在$\left(0,\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$，$\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty\right)$单调递减，在$\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$上单调递增。

评注：这类问题是最常见的一类导数问题。当 $x^2$ 出现在分母上，可以直接将分子令成一个新函数，讨论新函数的正负零等价于讨论原函数导数的正负零，从而可以轻松确定原函数的单调性。

## 4 提取 $e^x$ 型

例 3：已知函数 $f(x)=e^x-ax^2$

①若 a=1，证明：当时 $x\geq 0$，$f(x)\geq 1$。

②若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 只有一个零点，求 a。

思路：第二问 $f(x)=e^x-ax^2$ 的零点问题根据提取 $e^x$ 的原理 $h(x)=1-ax^2e^{-x}$ 可知其等价于的零点问题。

解：①当 $a=1$ 时，$f(x)\geq 1$ 等价于 $(x^2+1)e^{-x}-1\leq 0$。设函数 $g(x)=(x^2+1)e^{-x}-1$，则 $g'(x)=-(x^2-2x+1)e^{-x}=-(x-1)^2e^{-x}$。当$x\neq 1$时，$g'(x)<0$，所以$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减。而$g(0)=0$，故当$x\geq 0$，$g(x)\leqslant 0$，即$f(x)\geq 1$。

②设函数$h(x)=1-ax^2e^{-x}$。$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 只有一个零点当且仅当 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内只有一个零点。

当$a\leq 0$时，$h(x)>0$，$h(x)$ 没有零点。

当$a>0$时，$h'(x)=ax(x-2)e^{-x}$当$x\in(0,2)$时，$h'(x)<0$；当$x\in(2,+\infty)$时，$h'(x)>0$，故$h(x)$在 $(0,2)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，$h(2)=1-\frac{4a}{e^2}$是 $h(x)$ 在$[0,+\infty)$上的最小值[3]。

若 $h(2)>0$，即$a<\frac{e^2}{4}$，$h(x)$在 $(0,+\infty)$ 内没有零点。

若 $h(2)=0$，即$a=\frac{e^2}{4}$，$h(x)$在 $(0,+\infty)$ 内有一个零点。

若 $h(2)<0$，即$a>\frac{e^2}{4}$，由于$h(0)=1$，易知 $h(x)$ 在 $(0,2)$ 内有一个零点。下面只需要分析 $h(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 内是否还存在零点。由（1）知，当$x>0$时，$e^x>x^2$，所以$h(4a)=1-\frac{16a^3}{e^{4a}}=1-\frac{16a^3}{(e^{2a})^2}>1-\frac{16a^3}{(2a)^4}=1-\frac{1}{a}>0$，可知在 $(2,4a)$ 内还有一个零点。

评注：当题目中出现 $e^x$ 时，可以用提取 $e^x$ 法解题。如果提取正变量后构造的新函数中仍有参数可对参数进行分类讨论，根据条件最终确定参数范围。使用这种方法可以简化函数式，降低后续求导的复杂性。

## 5 结语

提取正变量法是解决导数问题的有效方法，找到合适的正变量是解决这类问题的关键。在解题过程中一些简单的同构式的运用可以化繁为简，轻松构造新函数。因此，在日常练习中，我们要善于发现和总结，丰富自己的知识体系，将这种方法熟练运用于解题中去。

## 参考文献

[1] 沃诚.简易恒流源的制作与调试[J].实验教学与仪器,2021(Z1):115.
[2] 张玲芳.核心素养视阈下的创新物理实验教学[J].数理化解题研究,2020(24):89.
[3] 颜艳.浅谈如何利用微课解决化学教学中的疑难点[J].文理导航(中旬),2017(6):95.