初等几何变换

Elementary Geometric Transformation

郭晓 张晨晨

Xiao Guo Chenchen Zhang

南阳职业学院
中国·河南 南阳 474500
Nanyang Vocational College,
Nanyang, Henan, 474500, China

【摘要】图形变换是采用运动的观点来研究几何图形的性质,它可以把证题思维推向更高的理性意境。证明几何命题经常需要引辅助线,尽管分析法和综合法可以提供引辅助线的线索,但引辅助线的最根本思维源泉仍是图形变换。初等几何变换包括两大类:合同变换(保持形状和大小不变)和相似变换(保持形状不变)。

【Abstract】Graphic transformation is to use the viewpoint of motion to study the nature of geometric figure, which can push the thinking of proof to a higher rational artistic conception. proving geometric propositions often requires the introduction of auxiliary lines. Although analytical and synthetic methods can provide clues to the introduction of auxiliary lines, the most fundamental source of thinking for the introduction of auxiliary lines is graph transformation. Elementary geometric transformation includes two main categories: contract transformation (keeping shape and size constant) and similarity transformation (keeping shape constant).

【关键词】合同图形;合同变换

【Keywords】contract graphics; contract transformation

【DOI】10.36012/sde.v1i3.506

1 预备知识

设有两个点集构成的两个图形 F 和 F_1 , 他们的点之间能建立这样的一一对应, 设 F 中任两点的连线段总等于 F_1 中两个对应点的连线段, 那么 F 和 F_1 称为相等或合同^[1]。

合同的图形有如下的性质:

- ①具有反身性、对称性和传递性;
- ②对应角相等;
- ③与共线点对应的是共线点。

图形的相等有两种情况, 在平面几何中, 两种相等图形, 若有两对对应点 A, A_1, B, B_1 重合, 则任何第三对对应点或重合或对称于重合直线 AB 。在前一场合, 两图形 F 和 F_1 转向相同, 称 F 和 F_1 为全相等; 在后一场合, 两图形 F 和 F_1 转向相反, F 和 F_1 称为镜照相等。两个全相等的平面图形, 只要有两对对应点叠合, 便完全叠合; 两个镜照相等的平面图形, 不将其中一个离开平面, 是无法叠合的。

定义 1 一个平面到自身的变换, 若保持任意两点间的距离不变, 称这个变换为合同变换。

设 A 是所有平面上合同变换 R 的全体, 则 A 关于变换的合成构成一个变换群。

定理 1 平面上的合同变换由不共线的三对对应点完全确定。

经过一个变换没有变更位置的点和直线, 称为这个变换的二重点和二重线。

2 合同变换

合同变换有两类: 第一类对应三角形沿周界的环绕方向相同, 第二类对应三角形沿周界的环绕方向相反。

合同变换主要有 3 种基本类型: 平移、旋转、轴反射。

2.1 平移变换

将图形 F 上的所有的点都按一定的方向 $\vec{l}$ (平移方向) 移动一个相同的距离 $|\vec{l}|$ (平移距离), 移动后的点构成图形 F_1 , 图形 F 到图形 F_1 的变换 T 称为平移变换, 简称平移, 记为

$$F \xrightarrow{T(\vec{l})} F_1$$

平移变换的性质如下:

- ①对应点的连线 $AA_1, BB_1, CC_1, \dots$ 互相平行且相等;
- ②对应线段 AB, A_1B_1 相等且平行; 对应角 $\angle ABC, \angle A_1B_1C_1$ 相等, 且角的两边同向平行;
- ③两平移的乘积是一个平移; 平移的逆是平移, 平移全体构成合同变换群的子群;
- ④在平移变换中, 没有二重点, 但平行于平移方向的所有直线都是二重线(除恒等变换);
- ⑤平移变换由一对对应点或由平移方向和距离完全确定;
- ⑥第一类合同变换。

2.2 旋转变换

将图形 F 上的所有的点都绕平面上一个定点 O (旋转中心) 旋转一个相同的角度 θ (旋转角), 旋转后的点构成图形 F_1 , 图形 F 到图形 F_1 的变换 R 称为旋转变换, 简称旋转, 记为 $F \xrightarrow{R(O, \theta)} F_1$, 逆时针旋转 θ 取正值, 顺时针旋转 θ 取负值。

旋转变换的性质:

- ①旋转中心 O 与每一对对应点的连线段相等, 且夹角为 θ ;
- ②对应线段相等, 且夹角为 θ (有向角);
- ③对应角相等;
- ④具有同一中心的所有旋转变换构成一个可换群, 旋转全体构成合同变换群的子群;
- ⑤旋转中心是唯一的二重点, 没有二重线;
- ⑥旋转由中心与一对对应点完全确定;
- ⑦第一类合同变换。

2.3 中心对称变换

将图形 F 上的所有的点都变为关于平面上一定点 O (对称中心) 的对称点, 变换后的点构成图形 F_1 , 图形 F 到图

形 F_1 的变换, 称为中心对称变换, 简称中心对称。

中心对称变换的性质:

- ①对应点的连线 $AA_1, BB_1, CC_1, \dots$ 都通过对称中心 O , 且被对称中心 O 平分;
- ②对应线段相等, 且反向平行或共线;
- ③对应角相等, 且角的对应边反向平行。

2.4 轴反射变换

将图形 F 上的所有的点都变为关于平面上一条定直线 l (对称轴) 的对称点, 变换后的点构成图形 F_1 , 图形 F 到图形 F_1 的变换 S 称为轴反射变换 (或轴对称变换), 简称轴反射 (和轴对称), 记为 $F \xrightarrow{S(l)} F_1$

轴对称变换的性质:

- ①对应点的连线 $AA_1, BB_1, CC_1, \dots$ 互相平行且都被对称轴 l 垂直平分。
- ②对应线段相等, 且延长后交于对称轴 l 的同一点, 两线形成的角被对称轴 l 平分对应角相等。
- ③若量反射轴 $l_1 // l_2$, 这关于 l_1 与 l_2 的两个反射的乘积是一个平移; 若 l_1 与 l_2 交于一点 O , 则关于 l_1 与 l_2 的两个反射的乘积是一个旋转。
- ④反射轴上的点都为二重点, 反射都是二重线, 与反射轴垂直的直线都是二重线。
- ⑤轴反射由反射轴或由一对对应点完全确定。
- ⑥第二类合同变换。

参考文献

- [1] 叶立军. 初等数学研究[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2008.