均值不等式在最值问题中的巧用

Ingenious Use of Mean Inequality in the Maximum Value Problem

赵茜

Qian Zhao

贵州师范大学数学科学学院　中国·贵州 贵阳 550025

School of Mathematics and Science, Guizhou Normal University, Guiyang, Guizhou, 550025, China

摘　要： 均值不等式是不等式的一种特殊种类，在不等式中处于核心地位，均值不等式在和型、积型、分式型以及根式型最值中可以使问题简单化。同时，在几何的问题上均值不等式也起到重要的作用。

Abstract: Mean inequality is a special kind of inequality, which is at the core of inequality, mean inequality can simplify the problem in sum type, product type, fraction type and radical maximum. At the same time, mean inequality also plays an important role in geometric problems.

关键词： 均值不等式；最值；中学；应用

Keywords: mean inequality; maximum value; middle school; application

DOI: 10.12346/sde.v3i12.4964

1 引言

均值不等式是高中数学必修 5 不等式部分的重要内容，也是高考的考点之一，占有很重要的分值。深刻体会均值不等式的含义，掌握相关的知识与技巧，是解决某些问题的工具。不等式的题型多样，而均值不等式是解决问题的方法之一，可以求解常见的最值问题。除此之外，了解不同类型最值情况可以提升解题能力，并使之简便、快捷，而且在几何和实际生活中有广泛的应用，对学生逻辑思维能力及实践能力的培养有重要意义。

2 均值不等式的概念及证明

2.1 概念

如果 $a>0,b>0$，那么 $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$（当且仅当 $a=b$ 时取等号）。

2.2 几种变形公式

①$a^2+b^2\geq\frac{(a+b)^2}{2}$。

②$ab\leq\frac{a^2+b^2}{2}$。

③$ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$。

④$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leq\frac{a^2+b^2}{2}$。

⑤$(a+b)^2\geq 4ab$。

⑥$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2(ab>0)$。

⑦$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geq\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\geq\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\quad(a>0,b>0)$。

当且仅当 $a=b$ 时，以上各式中的等号成立。

3 均值不等式的应用

求解最值问题是均值不等式的核心问题，而最值问题的形式多样化。其类型分为和型 $ax+\frac{b}{x}$ 的最值、积型 $ax(c-dx)$ 的最值、分式型 $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}$ 的最值、根式型最值等类型。

在求解过程中需满足“一正、二定、三相等”，即：

【作者简介】赵茜（1997-），女，中国贵州威宁人，在读硕士，从事学科教学（数学）研究。

一正：各项式各因式必须为正数；

二定：必须满足“和为定值”或“积为定值”；

三相等：要保证等号确定成立。

3.1 和型 $ax+\frac{b}{x}$ 的最值

和型 $ax+\frac{b}{x}$ 的特点在于未知数处于首项和第二项分式的分母上，这就在相乘时满足了“二定”的条件，在应用时可采取加项变换的方法来配出 ax 与 $\frac{b}{x}$ 乘积为定值，简便了运算的过程，在出现类似的题型时可采用以上方法。

例 1，已知函数 $f(x)=2^x+\frac{1}{2^x-1}(x>0)$，求 $f(x)$ 的最小值。

分析：满足和型 $ax+\frac{b}{x}$ 的特点，需 ax 项与 $\frac{b}{x}$ 项的乘积为定值，满足 $a+b\geq 2\sqrt{ab}$，利用加项变换的技巧，在 2^x 加 (-1) 配出 2^x-1 项，再加上 1，这样就可以使 2^x-1 与 $\frac{1}{2^x-1}$ 相乘时将 2^x-1 消去得到常数 1。

解：因为 $x>0$，所以 $2^x>1$ 故 $2^x-1>0$，

所以 $f(x)=2^x+\frac{1}{2^x-1}=(2^x-1)+\frac{1}{2^x-1}+1\geq$

$$2\sqrt{(2^x-1)\cdot\frac{1}{2^x-1}}+1=3$$

当且仅当 $2^x-1=\frac{1}{2^x-1}$，即 $x=1$ 时等号成立，所以函数 $f(x)$ 最小值为 3。

3.2 积型 $ax(c-dx)$ 的最值

积型 $ax(c-dx)$ 的特点是括号外和括号内有未知数，并且括号里只有一项有未知数，所以在应用此类型时需注意有无括号和未知数，在应用到解题中要观察未知数的系数是否互为相反数，若不是则通过乘以或除以常数来构造成 ax 与 $(c-dx)$ 的和为常数。

例 2，若 $0<x<\frac{2}{3}$，求函数 $y=x(2-3x)$ 的最大值。

分析：此题满足积型 $ax(c-dx)$ 的特点，解答时关键在于构造条件，使其和为定值，通常要乘以或除以常数、拆因式等方式进行构造，x 与 $2-3x$ 的和为常数，则需 x 乘以 3，使 $3x+(2-3x)=2$。

解：因为 $0<x<\frac{2}{3}$，所以 $x>0, 2-3x>0$，

所以 $y=x(2-3x)=\frac{1}{3}\cdot(3x)\cdot(2-3x)\leq$

$$\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{3x+(2-3x)}{2}\right]^2=\frac{1}{3}$$

当且仅当 $3x=2-3x$，即 $x=\frac{1}{3}$ 时 y 有最小值 $\frac{1}{3}$。

3.3 分式型 $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}$ 的最值

分式型 $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}$ 的特点是有两个未知数且在分式的分母上，在应用此类型时需注意未知数是否相同，并且会出现未知数的系数不相同的情况，所以在解题中进行 $\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\right)\cdot(x+y)$，之后进行展开就会出现 $a+b+\frac{ay}{x}+\frac{bx}{y}$ 的形式，再结合 $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2(ab>0)$ 来求解就可以了。

例 3，已知 $x>0, y>0, \lg 2^x+\lg 8^y=\lg 4$，则 $\frac{1}{x}+\frac{1}{3y}$ 的最小值是（ ）

$A.4$　　$B.2\sqrt{2}$　　$C.2$　　$D.2\sqrt{3}$

分析：满足分式型 $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}$ 的特点，结合条件，一般进行 $\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\right)\cdot(x+y)$，然后先展开再利用均值不等式。

解：由题意可得：$\lg 2^x+\lg 8^y=\lg 2^x+\lg 2^{3y}=\lg 2^{x+3y}=\lg 2^2$，

所以 $x+3y=2$，据此结合均值不等式有：

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{3y}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3y}\right)(x+3y)=\frac{1}{2}\left(2+\frac{x}{3y}+\frac{3y}{x}\right)\geq$$

$$\frac{1}{2}\left(2+2\sqrt{\frac{x}{3y}\cdot\frac{3y}{x}}\right)=\frac{1}{2}(2+2)=2$$

当且仅当 $x=3y=1$ 时等号成立。

综上可得 $\frac{1}{x}+\frac{1}{3y}$ 的最小值为 2，故选 C。

3.4 根式型最值

根式型最值的特点是带有根式，在解题过程中一般根据题目的条件来进行，遇见根号通常采用平方的形式，在这里需结合均值不等式的变形公式 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leq\frac{a^2+b^2}{2}$，在应用此类型时要注意利用 $\sqrt{a}$ 和 $\sqrt{b}$ 来代替 a、b。

例 4，已知 a、$b\in R^+, a+b=1$，求 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 的最大值。

分析：属于根式型最值类型，利用均值不等式和变形公式 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leq\frac{a^2+b^2}{2}$，已知条件是 $a+b=1$，而 $(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2=a+b$，所以进行对 1 替换 $\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2\leq\frac{a+b}{2}=\frac{1}{2}$ 就可以得出。

解：由 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leq\frac{a^2+b^2}{2}$，可得：

$$\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2\leq\frac{a+b}{2}=\frac{1}{2}$$

所以，$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leq 2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$，当且仅当 $\sqrt{a}=\sqrt{b}$，即 $a=b=\frac{1}{2}$ 时，$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 有最大值 $\sqrt{2}$。

3.5 几何最值问题中的应用

均值不等式在几何中也有广泛的实用性，常常作为求几何体的体积或者求平面图形的面积等相关问题。

例 4，把一块长为 a，宽为 $b(a>b)$ 的木板，它的两条对边紧靠的两堵相互垂直的墙面，使地面，木板和两堵墙围成一个直立三棱柱，问怎么围使体积最大？

分析：此类题属于求几何体的体积的类型，解此题根据条件画出图形，由于不知道是长还是宽为地面的边，所以要对长或宽作为地面的边分别进行讨论，再列出解析式结合均值不等式来求最大值。

解：如图 1 所示，若长 a 地面的边，即 $BC=a$，设 $AC=x$，则 $AB=\sqrt{a^2-x^2}$。

$\because B-AA'-C$ 是二墙面所成的直二面角

$\therefore AA'\perp$ 面 ABC

$\therefore V=S_{\Delta ABC}\cdot C'C$

$$=\frac{1}{2}AC\cdot AB\cdot AA'=\frac{1}{2}bx\sqrt{a^2-x^2}$$

$$=\frac{1}{2}b\sqrt{x^2\left(a^2-x^2\right)}\le\frac{1}{2}b\cdot\frac{x^2+a^2-x^2}{2}=\frac{1}{4}a^2b$$

当且仅当 $x^2=a^2-x^2$ 即 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}a$ 时等号成立

$\therefore V_{最大}=\frac{1}{4}a^2b$

当宽 b 为地面的边时，即 $BC=b$，同理 $V'=\frac{1}{4}b^2a$

$\because a>b$

$\therefore V_{最大}-V'=\frac{1}{4}a^2b=\frac{1}{4}b^2a=\frac{1}{4}ab(a-b)>0$

$\therefore V_{最大}>V'$

因此，当所围成的直三棱柱的底面是等腰直角三角形且以 a 斜边，b 为棱柱的高时，直三棱柱的体积最大。

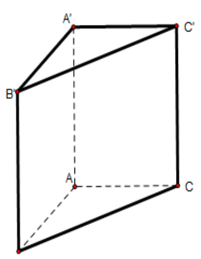

图 1

例 5，直线 l 过 $M(2,1)$ 且分别交于 x 轴、y 轴正半轴 A,B,O 为坐标原点，求 ΔABC 面积最小时 l 的方程。

分析：此类题属于平面图形的面积的类型，求直线的方程有两种方法，一是截距 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$；二是点斜式 $y-y_0=k\left(x-x_0\right)$，再结合均值不等式来列出三角形的面积。

解法 1：（截距式）

设直线 l 方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1(a>0)$，因为过点 $M(2,1)$，所以 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$。

则 $b=\frac{a}{a-2}$，所以可得：

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{(a-2+2)}{a-2}\right)^2=\frac{1}{2}\left[(a-2)+\frac{4}{a-2}\right]+2\ge4$$

当且仅当 $a-2=\frac{4}{a-2}$ 时等号成立，即 $a=4,b=2$。

所以直线 l 的方程为 $x+2y-4=0$，此时 $S_{最小}=4$。

解法 2：（点斜式）

设 $l:y-1=k(x-2)(k<0)$，所以 $A\left(2-\frac{1}{k},0\right),B(0,1-2k)$。

则：$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{k}\right)(1-2k)=\frac{1}{2}\left(-4k-\frac{1}{k}+2\right)\ge4$。

当且仅当 $-4k=-\frac{1}{k}$ 时，即 $k=-\frac{1}{2}$ 时等号成立。

所以直线 l 方程为 $x+2y-4=0$，$S_{最小}=4$。

4 结语

了解均值不等式的概念和变形公式是进一步理解均值不等式的基础，均值不等式常常以填空题和选择题的形式出现，并且常常求解的是最值问题，常见的最值类型有和型、积型、分式型和根式型，结合加项、拆因式、配凑等方法进行解题，在求解过程中需满足“一正、二定、三相等”。均值不等式的最值问题也会出现在几何和我们现实生活中，给我们带来了很大的方便。

参考文献

[1] 李建华.普通高中课程标准实验教科书(必修5)A版[M].北京:人民教育出版社,2007.

[2] 张波.应用均值不等式应注意“一正二定三相等”[J].数学学习与研究,2014(13):67.

[3] 陈锋.均值不等式在求最值中的运用[J].数学之友,2019(1):53-54.

[4] 班世福.均值不等式在求函数最值问题中的应用[J].高中数理化,2017(22):21-24.

[5] 张文雅.应用均值不等式求最值得常用方法[J].中学课程辅导(教师教育),2018(19):12.

[6] 胡霞.例谈高中数学解题中巧用均值不等式[J].数学学习与研究,2019(2):107.