浅析鸽笼原理的构造方法

Analysis on the Construction Method of Pigeonhole Principle

傅子芸

Ziyun Fu

华中师范大学数学与统计学学院　中国·湖北 武汉 401326

School of Mathematics and Statistics, Central China Normal University, Wuhan, Hubei, 401326, China

摘　要：鸽笼原理，又名抽屉原理，是组合数学中一个重要的基本原理。鸽笼原理在某一类存在性问题上有广泛的应用。论文在简单介绍鸽笼原理的基础上，从图形分割、整除问题、染色问题及连续问题这四个方面对构造方法进行分类，进而推演出应用鸽笼原理来解决某类存在性问题的方法。

Abstract: Pigeonhole principle, also known as drawer principle, is an important basic principle in combinatorial mathematics. Pigeonhole principle is widely used in a certain kind of existence problems. Based on a brief introduction of pigeonhole principle, this paper classifies the construction methods from four aspects: graph segmentation, divisibility problem, coloring problem and continuity problem, and then deduces the method of applying pigeonhole principle to solve some existing problems.

关键词：组合数学；鸽笼原理；构造

Keywords: pigeonhole principle; combinatorial mathematics; construction

DOI: 10.12346/sde.v3i12.4931

1 引言

鸽笼原理是组合数学中的一个基本定理，在组合数学的发展历程中有至关重要的作用。在数学的学习过程中，我们可以把它看作是一种重要的解决存在性数学问题的方法。论文介绍了构造抽屉原理的常见方法，并结合相关例子阐述了抽屉原理在解决不同类型数学问题中的应用。

2 鸽笼原理的内容

2.1 第一抽屉原理

原理 1：把多于 n+1 个的物体放到 n 个抽屉里，则至少有一个抽屉里的东西不少于两件。

原理 2：把多于 mn+1（n 不为 0）个的物体放到 n 个抽屉里，则至少有一个抽屉里有不少于（m+1）的物体。

原理 3：把无数还多件物体放入 n 个抽屉，则至少有一个抽屉里有无数个物体。

原理 1、2、3 都可以使用反证法进行证明。

2.2 第一抽屉原理的相关理解

现在我们用映射的思想来理解一下抽屉原理：

令 X 和 Y 是两个集合（集合中元素为有限个），f：X→Y 为从集合 X 到集合 Y 的一个映射。现讨论一下几种情况：

第一，若 X 中的元素个数与 Y 中的元素个数相等，且该函数既为单射又为满射，则 f 是一对一的。

第二，X 中的元素个数多于 Y 中的元素个数，且该函数为单射，则 f 不是一对一的。

现在我们用平均分的思想来理解一下抽屉原理：

抽屉原理的前提条件是每一个抽屉装上物体的概率是一样的，每一个抽屉都具有随机性和等分性，为满足抽屉原理的至少的要求，我们尽可能地将 n 个物体平均分到 m 个盒子里面去，这能使得每一个盒子里面的物体数量都为 [n/m]，我们再将剩下的 n-[n/m] m 个物体随机放入盒子里，即可得必有一个抽屉中物体的个数至少有 [n/m] +1 个物体。

【作者简介】傅子芸（2002-），女，中国重庆人，在读本科生，从事数学与应用数学研究。

3 鸽笼原理的构造方法归类及总结

3.1 几何图形分割问题（点的距离问题 / 多点的面积问题）

例 1。证明：在边长为 1 的等边三角形中任取五个点，至少有 2 个点的距离小于等于 1/2。

证明：取每条边的中点，将三个中点连线。此时，边长为 1 的大三角形，被分割为四个边长为 1/2 的等边三角形。由鸽笼原理可知，存在一个小三角形里（包括边）上有两个点，即可知它们之间的距离不超过小三角形的边长 ½，见图 1。

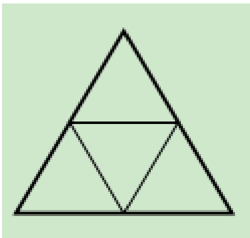

图 1 等边三角形

例 2。在边长为 1 的正方形中，任意放入 9 个点，求证这 9 个点中任取 3 个点组成的三角形，至少有一个的面积不超过 1/8（1963 年中国北京市数学竞赛题）。

证明：（方法一）将边长为 1 的正方形等分成边长为 ½ 的四个小正方形。将 9 个点任意放入这四个正方形中，由鸽笼原理可知，必有 3 个点落入同一正方形中。通过这三个点的任意一点作平行线，通过计算可知，它们的面积小于 1/8，见图 2。

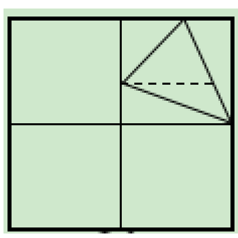

图 2 边长为 1 的正方形

（方法二）将边长为 1 的正方形横向四等分，可得四个相同的长为 1，宽为 1/4 的长方形。将 9 个点任意放入这四个长方形中，由鸽笼原理可知，必有 3 个点落入同一个小长方形。通过计算可知，它们的面积小于 1/8，见图 3。

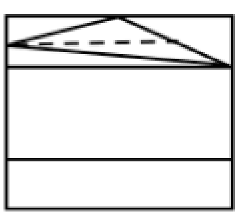

图 3 边长为 1 的正方形横向四等分

总结：几何分割的构造方式一般适用于在三角形（正方形、长方形、扇形等）几何图形内，放入若干个点后，求解存在两个点之间的距离不超过某值（例 1），或是存在几个点围成的图形的面积不超过某值（例 2）。

为使构造结果满足鸽笼原理我们需构造出等分的区域，使得恰好在一个区域内满足题目所需的相应点数。

下面对两种情况分别分析：

第一，两个点之间的距离不超过某值。为求得存在两个点的距离不超过某值，我们可将图形等分为相应的份数后，使得在某一区域内恰有两个点，则这两个点的距离小于这个区域内可得的最大距离即可。

分析即可知，需构造的抽屉数应比放入的总点数少 1（放入的总点数 = 抽屉数 +1）。

第二，几个点围成的面积不超过某值。为求得存在几个点（设为 a）围成的面积不超过某值，与上述同样的思想，我们可将图形等分为相应的份数后，使得在某一区域内恰有题目要求的点数 a，则这几个点围成的面积小于在这个区域内可得的最大面积。

分析即可知，需构造的抽屉数应满足在一个区域内含有 a 个点，其余的区域内含有（a − 1）个点，即满足放入的总点数 = 抽屉数 ×（构成图形的点数 − 1）+1。

抽屉分割方式处理：因为鸽笼原理要求抽屉为相同的，所以需进行等分处理。

对于长方形或正方形，一般进行对长或宽的等分或十字分割型对于三角形，一般进行连接中点的处理。

3.2 整除问题（有限整除 / 无限整除）

例 1。证明：在任意给出的 n+2 个整数中必有两个数，它们的和或差能被 2n 整除。

证明：设 A 是由 n+2 个整数组成的集合。

令 $A_i=\{a\in A$，a 被 2n 整除余数为 i 或 $2n-i\}$（i=0，…，n）。

则 |A|=n+1，且因为有 n+2 个整数。

故由鸽笼原理可知，存在 A_i，使得 $|A_i|\geqslant 2$。

设 a_1，$a_2\in A_i$，则 a_j（j=1，2）除以 2n 余数为 i 或 $2n-i$。

如果 a_1，a_2 除以 2n 余数均为 i，或均为 $2n-i$，则它们的差能被 2n 整除。

如果 a_1，a_2 除以 2n 余数一个为 i，一个为 $2n-i$，则它们的和能被 2n 整除。

例 2。任取 5 个数，必然能够从中选出 3 个数，使他们的和能够被 3 整除。

证明：任意给一个整数被 3 整除，余数可能为 0、1、2，我们把被 3 除余数为 0、1、2 的整数各归类为 r_0、r_1、r_2，即 r_i（i=0、1、2）中的元素被 3 整除后的余数为 i。

由鸽笼原理可知，存在 $|r_i|\geqslant 2$。

因此，可能出现两种情况：

①某一类中包含三个数，即存在 $|r_i|\geqslant 3$。

在包含元素大于三个的类别中任取3个数，其和能被3整除。

即 $3|3k_1+i+3k_2+i+3k_3+i$（k_1，k_2，$k_3 \in R$）。

②某两类各含两个数，第三类包含一个数。

在三类中各取一个数，其和也能被3整除。

即 $3|3k_4+0+3k_5+1+3k_6+2$（k_4，k_5，$k_6 \in R$）。

综上所述，原命题成立。

总结：有限整除。有限整除问题采用的总体思路是对其余数进行分类，当我们对所有数进行余数分类后，它们的和差与原数相除的结果也可以用它们的余数的和差进行判断。题目的要求一般为从数组中，任取两个数，它们的和或差是某个数A的倍数（例1），或是从数组中，任取多个数（＞2），它们的和是某个数A的倍数（例2）。

下面对两种情况分别分析：

第一，任取两个数，它们的和或差是某个数A的倍数。当我们将数字以余数的方式进行分类后，需求的差为某数的倍数可转换为至少有两个数的余数相等，需求的和为某数的倍数可转换为存在余数分别为（A－i）和i的两个数，故当我们以余数为（A－i）和i为一组进行分类时，在该分类中存在两个数即可说明它们的和或差是某个数A的倍数。

第二，任取多个数（＞2），它们的和是某个数A的倍数。此类问题与上述情况①的分类的方法类似，因为此类问题仅要求对数字的和进行讨论，我们即可直接以余数的方式进行分类，需求的和为某数的倍数可转换为对应数字的余数的分组情况进行分析。这种情况即可进一步讨论每一个余数框内的数字个数，再分析求解。

例3。在任意给出的100个整数中，都可以找到若干个数出来，他们的和可被100整除。

证明：将这100个整数排成一个数列，并记为 a_1，a_2，…，a_{100}；令 S_m 为前m项的和。

若 $S_i|100|$（i=1，2，…，100），则命题得证。

若 S_1，S_2，…，S_{100} 中没有数能够被100整除，则它们的余数必是{1，2，…,99}中的元素。

由鸽笼原理可知，S_1，S_2，…，S_{100} 中必有两个数，它们被100整除的余数相同，不妨设这两个数为 S_i，S_j，（$1 \leq i$，$j \leq 99$，i，j为整数）则 $100|S_i-S_j|$，即命题得证。

总结：无限整除。无限整除问题题目的要求一般为在某数组中，任取若干个数，它们的和能被某数整除。这类问题采用的仍是对余数进行分类，但由于取出的数的个数是未知的，我们并不能用有限整除中直接讨论余数个数的方法。在处理“任取若干个数，其和能被A整除”这类问题时，我们不妨构造出 $\{S_n\}$（$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$），可发现任意一串数字的和可由 S_i-S_j 得到，此后的问题转化为是否存在 S_i，S_j 除以A的余数一致或存在 S_n 能被A整除。

3.3 染色问题（多人相识问题/通信问题）

例1。平面上有6个点，其中任何3点都不共线，任意两点间连一条红色线段或蓝色线段。

证明：一定存在一个三边颜色相同的三角形。

证明：以某点A为其中一个端点地共有5条线段，用两种颜色进行染色，由鸽笼原理可知。至少有三条同色，不妨设 AB_1、AB_2、AB_3 是红色。考虑线段 B_1B_2、B_1B_3、B_2B_3，同样用两种颜色进行染色，由鸽笼原理可知，至少有两条同色。若线段 B_iB_j 为红色，则△ AB_iB_j 为红色三角形；若三条线段均为蓝色，则△ $B_1B_2B_3$ 为蓝色三角形。即题目得证。

拓展：若将点看作是一个人，染红色表示存在关系A，染蓝色表示存在关系B，则可得到命题：任选六个人，一定存在三个人，他们两两之间都有关系A、关系B。

第一，若关系A表示不认识，关系B表示认识，则命题为：任选六个人，一定存在三个人，他们两两之间认识或不认识。

第二，若关系A表示题目A，关系B表示题目B，则命题为：六个人中两两通信，在他们通信时，只讨论题目A、B，则一定存在三个人讨论的是同一题。

推广方式：改变颜色种数，点数。

例2。在66个科学家中，每个科学家都和其他科学家通信，在它们的通信中仅仅讨论4个题目，而任何两个科学家之间仅讨论一个题目，证明：至少三个科学家，它们互相之间讨论同一个题目。

证明：将66个科学家视为66个点，每两点之间连一条线，若该线为红色则表示这两个科学家在讨论第一题，若该线为黄色则表示这两个科学家在讨论第二题，若该线为蓝色则表示这两个科学家在讨论第三题，若该线为绿色则表示这两个科学家在讨论第四题。则该题转化为是否存在一个同色三角形。

考虑点A，以A为其中一个端点的线段有65条，用四种颜色进行染色，由鸽笼原理知，至少有17条线段同色，不妨设 AB_i（i=1，2，…，17）同红色。

第一，若 B_iB_j（i，j=1，2，…，17，$i \neq j$）中存在红色的线段，则 AB_iB_j 为同红色三角形。

第二，若 B_iB_j（i，j=1，2，…，17，$i \neq j$）中不存在红色的线段，即线段全为黄色、蓝色和绿色。

考虑点 B_1，在 B_iB_j（i，j=1，2，…，17，$i \neq j$）中，以 B_1 为其中一个端点的线段有16条，用三种颜色进行染色，由鸽笼原理知，至少有6条线段同色，不妨设 B_1B_r（r=2，…，7）同黄色。

①若 B_rB_q（r，q=2，…，7，$r \neq q$）中存在黄色的线段，则 $B_1B_rB_q$ 为同黄色三角形。

②若 B_rB_q（r，q=2，…，7，$r \neq q$）中不存在黄色的线段，即线段全为蓝色或绿色。

考虑点 B_2，在 B_rB_q（r，q=2，…，7，$r \neq q$）中，以

B_2 为其中一个端点的线段有 5 条，用两种颜色进行染色，由鸽笼原理知，至少有 3 条线段同色，不妨设 B_2B_p（p=3，…，7）同蓝色。

①若 B_pB_k（p，k=3，…，7，$p \neq k$）中存在蓝色的线段，则 $B_2B_pB_k$ 为同蓝色三角形。

②若 B_pB_k（p，k=3，…，7，$p \neq k$）中不存在蓝色的线段，即线段全为绿色，故存在同绿色的三角形。

该题得证。

总结：染色问题、多人相识问题以及通信问题的本质相同，故可将多人相识问题和通信问题转化为染色问题进行讨论。该题一般讨论对任意两点之间的连线染色，讨论是否存在同色的三角形（多边形）。

讨论方法通常是对一个点的发散线段的颜色进行分析，即讨论线段数目与颜色数目的数量关系，利用鸽笼原理，依次再对后续问题进行同样的分类讨论。

3.4 连续问题

例 1。某棋手参加了一次为期 11 周共 77 天的集训，已知他每天至少下一盘棋，而每周至多下 12 盘棋。证明：在集训期间必有连续的若干天，在这几天里该棋手共下 21 盘棋。

证明：设该棋手第 i 天下 a_i 盘棋，S_i 为前 i 天下的棋数的总和（$1 \leqslant i \leqslant 77$，$1 \leqslant a_i \leqslant 5$）。

$1 \leqslant S_1 < S_2 < \cdots < S_{77} \leqslant 12 \times 11 = 132$。

则 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{77} = 12 \times 11 = 132$。

而 $132 + 21 = 153$。

其中，$S_1 \sim S_{77}$ 是严格递增且取值范围在 1~132 之间整数值的数列，$S_1 + 21 \sim S_{77} + 21$ 也是严格递增且取值范围在 22~153 之间整数值的数列。

考查数列 S_1，S_2，S_3，…，S_{77}，$S_1 + 21$，$S_2 + 21$，$S_3 + 21$，…，$S_{77} + 21$（共 154 项，这 154 项的取值是从 1 到 153 之间的整数）。

这说明 154 项的取值是 153 个整数，由鸽笼原理的必有两项取值相同，设 $S_j = S_i + 21$（$1 \leqslant i < j \leqslant 77$），即 $S_j - S_i = 21$。

即 $(a_1 + a_2 + \cdots + a_i + a_{i+1} + \cdots + a_j) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_i) = 21$，$a_i + 1 + \cdots + a_j = 21$。

即从第 $i + 1$ 天开始的连续($j - i$)天此棋手共下 21 盘棋。

总结：连续问题一般讨论存在连续数字 / 时间，数字之和 / 时间内完成数目之和为某值 A。此类题目与无限整除的相同点在于都在讨论任意多个数之和的问题；它们的不同点在于无限整除只要求整除，而连续问题要求相等。这也说明无限整除中对“任取多个数”这一要求的构造可以应用在此类题目中。

处理此类题目，我们不妨先构造出 $\{x_n\}$（$x_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$），亦可用 $x_i - x_j$ 表示任意一串数字的和，为构造两项相差为 A，不妨构造 $\{y_n\}$，满足 $y_n=x_n+A$，再利用鸽笼原理说明 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 内各有一项相同，即得 $x_i=y_j=x_j+A$，即题目得证。

4 鸽笼原理的构造总体思路

构造步骤：

第一，分析题意，明确题目中什么是“抽屉”，什么是“东西”。

第二，制造抽屉。

第三，运用鸽笼原理解决问题。

参考文献

[1] 王丽丽,王爱法.抽屉原理构造方式的研究和演示[J].高等数学研究,2021,24(1):33-35.

[2] 鲍世杰.抽屉原理及其应用[J].农村经济与科技,2018,29(24):226+233.

[3] 王春荣.鸽笼原理在数学解题中的应用[J].商业文化:学术版,2009(12):214-215.