巧用组合图形求解初中物理阿基米德王冠题型问题

Skillfully Solving Archimedes Crown Questions in Junior Middle School Physics with Combined Graphics

袁文超

Wenchao Yuan

新疆师范大学　中国·新疆 乌鲁木齐 830000

Xinjiang Normal University, Urumqi, Xinjiang, 830000, China

摘　要：古希腊学者阿基米德采用“排水法”鉴定王冠纯度之后，计算王冠含金比例便演变成了经典问题，在目前初中物理习题中较为常见，随着对王冠问题题型进一步拓展研究，该题型已应用到了求解电学、功、速度等物理问题中，常见的有“鸡兔同笼抬脚法”、列方程法、十字交叉法等，笔者创造性地采用组合图形的方式形象直观地表达题意并运算。按照“题意分析—图形表示—图形运算—得出结论”的思维过程对这种新方法进行阐述。

Abstract: After Archimedes, an ancient Greek scholar, used the “drainage method” to identify the purity of the crown, the calculation of the gold content ratio of the crown became a classic problem, which is more common in junior high school physics exercises. With the further expansion of the research on the question type of the crown problem, this question type has been applied to solving physical problems such as electricity, work and speed. The common method is “chicken and rabbit raising their feet in the same cage”, column equation method, cross-crossing method, etc. The author creatively uses the way of combined graphics to express the meaning of the question visually and calculate. This paper expounds this new method according to the thinking process of “topic meaning analysis—graphic representation—graphic operation—conclusion”.

关键词：阿基米德；王冠问题；图形法

Keywords: Archimedes; crown problem; graphic method

DOI: 10.12346/sde.v3i9.4369

1 引言

古希腊有位国王，他让工匠用纯金制作一顶王冠，国王怀疑工匠掺假窃取黄金，便命令阿基米德检验王冠的含金度，阿基米德苦思冥想终于在洗澡时灵光一闪发明了“排水法”测物质纯度，成功测定了王冠的含金量。这种方法被后人经过大量重复实验被总结为“阿基米德原理”[2]。

2 王冠问题

现将王冠问题具体写为：现有一个金和银做成的王冠总质量为 130g, 若制造同体积的纯金王冠需要的金块质量为 200g, 制造同体积的纯银王冠则需要银块的质量为 100g, 则合金中的金和银的体积之比为多少?

3 分析

题目中给出了相同体积下的金银混合王冠的质量，纯金王冠的质量以及纯银王冠的质量这三种情形。首先用图形将三种王冠表示出来：根据密度公式 $M=\rho V$ 可知体积和密度成正比，则将王冠的体积分割为一定数量的等份，用“□”表示，用点“·”表示密度，在每一等份中用点的多少来表示密度的大小，点数越多密度越大，点数越少则密度越小，则上述三种情形的王冠可表示如图 1~ 图 3 所示。

①纯金王冠：

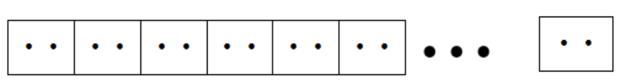


图 1

【作者简介】袁文超（1992-），男，中国河南商丘人，在读硕士，从事中学物理研究。

②纯银王冠：

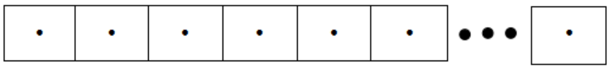


图 2

③金中掺银王冠：

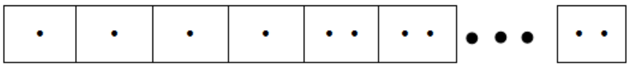
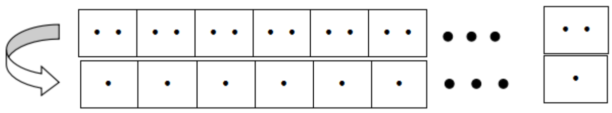


图 3

其次，用“做差法”找出金银混合王冠中金、银所占的体积份数，先用纯金王冠图形（见图 1）与纯银王冠图形（见图 2）做差，得到图 4。



得到图 4：

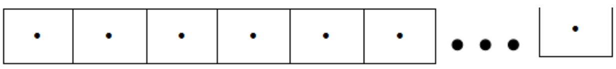


图 4

再用纯金王冠（见图 1）与金银混合王冠（见图 3）做差，得到图 5。

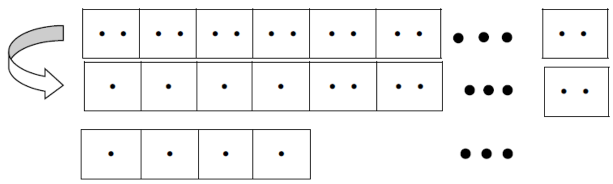


图 5

最后，用图 5 数值与图 4 数值相除（见图 6）。

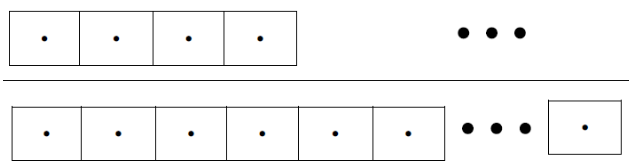


图 6

便可以得到金银混合王冠中所含有的银的比份了。

整个计算过程可表示为：

$$\frac{V_{银}}{V_{皇冠}}=\frac{m_{纯金}-m_{皇冠}}{m_{纯金}-m_{纯银}} \quad （式 1）$$

设王冠总体积比份数为“1”，则：

$$\frac{V_{金}}{V_{皇冠}}=1-\frac{V_{银}}{V_{皇冠}}=\frac{m_{皇冠}-m_{纯银}}{m_{纯金}-m_{纯银}} \quad （式 2）$$

式 2/ 式 1 得：

$$\frac{V_{金}}{V_{银}}=\frac{m_{皇冠}-m_{纯银}}{m_{纯金}-m_{皇冠}} \quad （式 3）$$

解：

已知：m 王冠 =130g,m 纯金 =200g,m 纯银 =100g, 则

$$\frac{V_{金}}{V_{银}}=\frac{m_{皇冠}-m_{纯银}}{m_{纯金}-m_{皇冠}}=\frac{130-100}{200-130}=\frac{3}{7} \quad （式 4）$$

即王冠中金的体积与银的体积之比为 3 比 7。

4 例题及分析

下面列举一道电学习题：

(2020 自治区模拟)A、B 分别为两种不同材料制成的电阻丝、长度分别为 L，将 A、B 两根电阻丝分别接入同一电源两端时，两电阻丝的电功率分别为 P 和 2P，现将两根电阻丝各截取一段，串联起来组成长度为 L 的 C 电阻丝，将电阻丝 C 接入同一电源两端时，电阻丝的电功率为 1.6P，已知电阻丝的电阻值与长度成正比，则截取的电阻丝 A、B 的长度之比为（ ）。

A. 3 ∶ 2　　B. 2 ∶ 3

C. 1 ∶ 3　　D. 1 ∶ 2

分析：

题目中给出了相同长度 L 下的 A、B 不同材质混合的电阻丝的电功率，A 材质电阻丝的电功率，B 材质电阻丝电功率。首先用图形将三种电阻丝表示出来：因为电阻的大小和长度成正比，将电阻丝的长度分割为一定等份，用“□”表示，用点“·”表示电阻，在每一等份中用点的数量来表电阻的大小，点数越多则电阻越大，点数越少则电阻越小，根据 $P=\frac{U^2}{R}$ 可知 P 和 R 成反比，$R_A > R_B$ 则上述三种电阻丝可表示如下：

① A 电阻丝电阻（见图 7）：

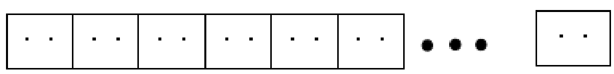


图 7

② B 电阻丝电阻（见图 8）：

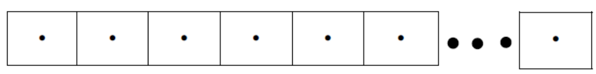


图 8

③ AB 混合电阻丝电阻（见图 9）：

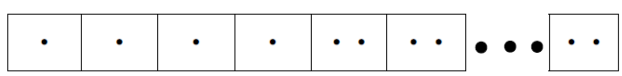
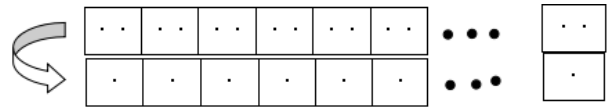


图 9

其次，用“做差法”表示出 AB 混合电阻丝中 A、B 所占的长度份数，具体步骤如下：先用 A 电阻丝图形（见图 7）与 B 电阻丝图形（见图 8）做差，得到图 10：



得到图 10：

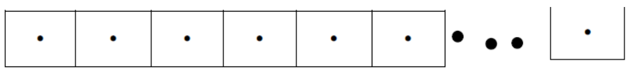


图 10

再用 A 电阻丝（见图 7）与 A B 混合电阻丝（见图 9）做差，得到图 11：

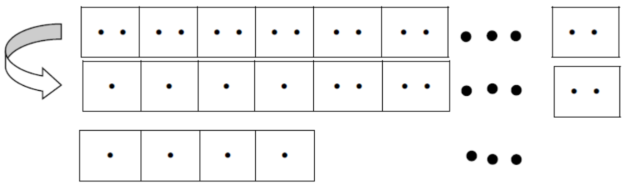


图 11

最后，用图 11 与图 10 进行相除运算（见图 12）：

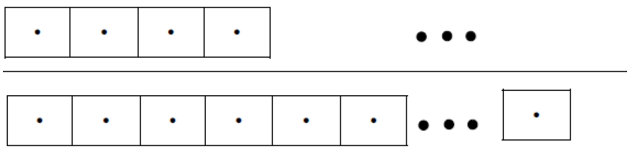


图 12

便可以得到 A B 混合电阻中所含有的 A 电阻长度比份了。

整个计算过程可表示为：

$$\frac{L_B}{L_{AB}}=\frac{R_A\text{-}R_{AB}}{R_A\text{-}R_B} \qquad （式 5）$$

设 AB 混合电阻总长度比份数为“1”，则：

$$\frac{L_A}{L_{AB}}=1\text{-}\frac{L_B}{L_{AB}}=\frac{R_{AB}\text{-}R_B}{R_A\text{-}R_B} \qquad （式 6）$$

式 6/ 式 5 得

$$\frac{L_A}{L_B}=\frac{R_{AB}\text{-}R_B}{R_A\text{-}R_{AB}} \qquad （式 7）$$

解：已知：设电路电压为 U，P_{AB}=1.6P，$R_{AB}=\frac{U^2}{1.6P}$；P_B=2P,$R_B=\frac{U^2}{2P}$；P_A=P,$R_A=\frac{U^2}{P}$。

$$\frac{L_A}{L_B}=\frac{R_{AB}-R_B}{R_A-R_{AB}}=\frac{\frac{U^2}{1.6P}-\frac{U^2}{2P}}{\frac{U^2}{P}-\frac{U^2}{1.6P}}=\frac{1}{3} \qquad （式 8）$$

即：混合电阻丝中截取 A、B 电阻长度之比为 1 比 3。

下面列举一道速度类型的题：

某汽车在平直公路上行驶，前一段时间 t_1 内，以 20m/s 的速度匀速行驶；后一段时间 t_2 内，以 10m/s 的速度匀速行驶；已知全程的平均速度是 18m/s, 则 t_1 ： t_2 为（ ）。

A.4 ： 1　　B.1 ： 4　　C.1 ： 3　　D.3 ： 1

分析：

题目中给出了汽车三种不同的行驶速度，分为前半段时间和后半段时间以及总段时间下的行驶速度。假设汽车行驶完总路程的时间是 t，则将总时间分成为一定数量的等份，用“□”表示，用点“·”表示速度，在每一等份中用点的多少来表示速度大小，速度大则点数越多，速度小则点数少。

则上述三种情形的汽车行驶的路程可表示如图 13~ 图 15 所示。

①以 20m/s 速度行驶 t 时间的路程：

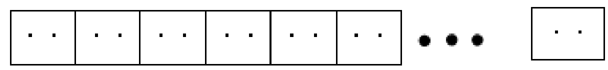


图 13

②以 10m/s 速度行驶 t 时间的路程：

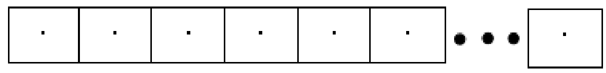


图 14

③以 20m/s 速度行驶 t_1 再以 10m/s 速度行驶 t_2 的路程：

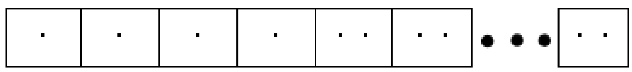
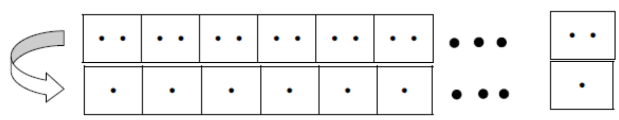


图 15

其次，用“做差法”找出 t_1 与 t_2 所占份数，先用图 13 与图 14 做差，得到图 16：



得到图 15：

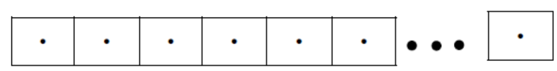


图 16

再用图 13 与图 15 做差，得到图 17：

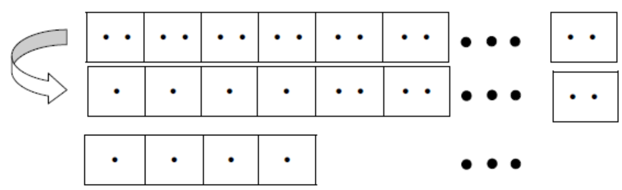


图 17

最后，用图 16 数值与图 15 数值相除（见图 18）：

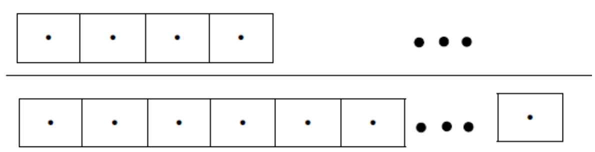


图 18

便可以得到 t_2 含有的比份了。

整个计算过程可表示为：

$$\frac{t_2}{t}=\frac{S_{V1}-S}{S_{V1}-S_{V2}} \quad （式 9）$$

设总时间份数为“1”，则：

$$\frac{t_1}{t}=1-\frac{t_2}{t}=\frac{S-S_{V2}}{S_{V1}-S_{V2}} \quad （式 10）$$

式 10/ 式 9 得

$$\frac{t_1}{t_2}=\frac{S-S_{V2}}{S_{V1}-S} \quad （式 11）$$

解：

已知：V_1=20m/s,S_{v1}=20t;V_2=10m/s,S_{V2}=10t; $S_{\bar{V}}$ =18t, 则

$$\frac{t_1}{t_2}=\frac{S-S_{V2}}{S_{V1}-S}=\frac{18t-10t}{20t-18t}=\frac{4}{1} \quad （式 12）$$

即 t_1 与 t_2 之比为 4 ： 1。

下面再列举一道功与功率方面的习题：

有甲、乙两台机器，其功率不同但都为定值。在完成一次特定任务时，两台机器先后做功累计时间 140h, 做功之和为 W；若甲、乙两台机器单独做数量为 W 的功所需的时间分别为 100h 和 200h, 则在完成上述特定任务时乙做的功和甲做的功之比为（ ）。

A.2 ： 3 B.4 ： 7 C.3 ： 5 D.3 ： 7

分析：

题目中给出了三种情形下的甲、乙两台机器做相同的功所需的时间，分别是甲机器单独做功，乙机器单独做功，甲乙两机器合作做功。首先用图形将三种情形表示出来：机器功率一定做的功越多所需要的时间则越长，因此将总功分割为一定数量的等份，用“□”表示，用点“·”表示时间，在每一等份中用点的多少表时间的长短，时间长则点数越多，时间短则点数少，则上述三种做功情形可表示如下：

①乙机器单独做功所需要的时间（见图 19）：

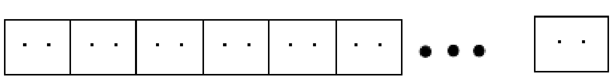


图 19

②甲机器单独做功所需要的时间（见图 20）：

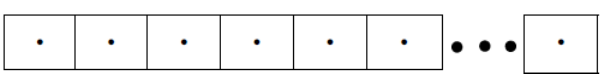


图 20

③甲乙机器合作做功所需要的时间（见图 21）：

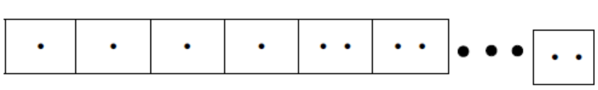


图 21

其次，用“做差法”找出甲乙机器做功占总功的份数，先用图 19 与图 20 做差，得到图 22：

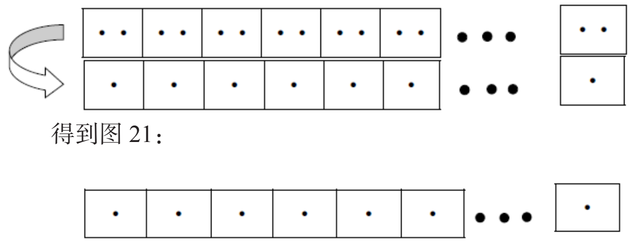


图 22

再用纯金王冠(见图 18)与金银混合王冠(见图 20)做差，得到图 23：

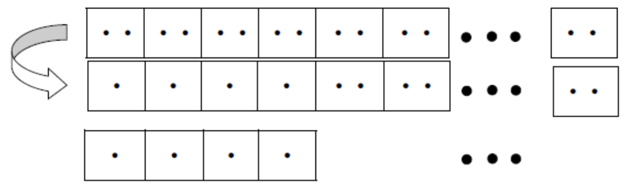


图 23

最后，用图 23 数值与图 22 数值相除（见图 24）：

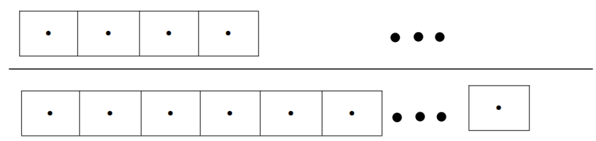


图 24

便可以得到甲乙机器做功占总工的比份了。

整个计算过程可表示为：

$$\frac{W_{甲}}{W_{总}}=\frac{t_{乙}-t_{总}}{t_{乙}-t_{甲}} \quad （式 13）$$

设王冠总体积比份数为“1”，则：

$$\frac{W_{乙}}{W_{总}}=1-\frac{W_{甲}}{W_{总}}=\frac{t_{总}-t_{甲}}{t_{乙}-t_{甲}} \quad （式 14）$$

式 13/ 式 14 得

$$\frac{W_{甲}}{W_{乙}}=\frac{t_{乙}-t_{总}}{t_{总}-t_{甲}} \quad （式 15）$$

解：

已知：$t_{甲}$=100,t 乙 =200，t 甲乙 =140, 则：

$$\frac{W_{甲}}{W_{乙}}=\frac{t_{乙}-t_{总}}{t_{总}-t_{甲}}=\frac{200-140}{140-100}=\frac{3}{2} \quad （式 16）$$

即两机器乙与甲做功之比为 2 ： 3。

综上所述，使用阿基米德王冠题型组合图形法首先要将问题中物理量

分割为一定等份，并用方格表示出来，其次找到与之成正比的物理量

用点表示，点的多少代表数值的大小，这样便可以组成三种不同的图形，单一组分 a，单一组分 b，ab 混合为组分 c，三者关系为：a ＞ c ＞ b 则根据图形运算可以得出结论：混合组分 c 中 a、b 所占比例为：

$$\frac{C_a}{C_b}=\frac{c-b}{a-c}。$$

5 结语

在初中物理解题过程中，许多题目都是将文字与图像相结合的方式[3]，采用的组合图形表征法最大特点在于同时表征 2 个物理量，从而很大程度上减少引入未知数，减少方程数量。这对于提高中学生物理图形表征思维能力[4]有很大促进作用，激发他们用图形表征法解决物理问题的兴趣，同时教师将图形表征法应用于实际[5]还能够更好地培养学生理解和解决问题能力。

参考文献

[1] 方秀林.流传千年的“鸡兔同笼”问题[J].初中生世界,2021(21):58.

[2] 张瑞.解读阿基米德原理[J].中学生数理化(八年级物理)(配合人教社教材),2021(5):6-7.

[3] 李正清.对初中物理解题中常用方法的思考[J].智力,2020(26):75-76.

[4] 王万平.物理教学中学生图形表征能力的培养[J].中学物理教学参考,2021,50(10):10-14.

[5] 林心怡.图形表征在初中物理教学中的应用研究[D].上海:上海师范大学,2021.

（上接第116页）

4.3 图形表示法

奇合数可用一组由不同斜率的直线图形如 $3^2-0^2,4^2-1^2,5^2-2^2$……连成的直线及其他类似直线组成的扇形图表示，而 y 轴奇数的水平线与这些直线相交点不是对应 x 轴整数值的 y 奇数值就是质数。

如果 x 轴表示自然数，y 轴表示奇数，则 x 序数与 y 奇数的交点是合数 x^2-y^2，直线的斜率 =y/x=2(2n+1)x；y 轴奇数与 x 轴序数没有交点的奇数是质数。

还可以用 x 轴表示平方数坐标，y 轴表示自然数，则对应一条向上弯曲的平方数曲线，凡 y 轴自然数对应于曲线上的交点的 x 坐标不是整数的都是质数[3]。

图形表示法虽然很容易区分出质数和合数，但是需要很大的空间，因此是不实用的。

孪生质数 6n ± 1 的必要和充分条件是：

$$n \neq 6xy \pm (x \pm y)$$

其中，x,y 为自然数。

如同奇合数 2n+1=(2x+1)(2y+1) 一样，孪生质数的条件式虽然简单，而要求解并不容易。

对于质数的定义的想法。

除 2 以外，其它质数皆是奇数，2 是由定义而得到的唯一偶质数。实际上，在判别质数时也大都不考虑它。一些著名的“猜想”，也未考虑它和其他偶数。

若将 2 这唯一偶质数排除后，质数也就可以看成是仅对奇数数列的定义了。

若以奇偶划分，除去特殊数 0 外，则 2 是最小的偶数，对于偶数数列，也与奇数列有同样的性质，并会有偶“质数”。偶数数列不过是奇数数列的 2 倍而已。

这样扩展质数后，小数、分数、复数等数列，也会与奇数数列有同样的性质，可分为“质数”和“合数”，甚至负数等数列也可以有这样的性质。

5 结语

使用平方的特性愈多，判别质数就愈容易。应当还有其它特性可以解析质数问题。平方差法对大数的分解也应很有用处。

参考文献

[1] 波恩哈德·黎曼.黎曼猜想[Z].

[2] 孙琦,旷京华.素数判定与大数分解[M].沈阳:辽宁教育出版社,1987.

[3] 李炳贤,李娜,陈龙泉.素数递进筛及初步应用[J].数学学习与研究,2020(21):138-140.