

# 中学数学建模课程开展案例研究 ——以“最小二乘线性拟合”的教学为例

## Case Research of Middle School Mathematical Modeling Courses —Taking the Teaching of “Least Squares Linearity” as an Example

甄健华

Jianhua Zhen

石家庄市第二中学 中国·河北 石家庄 050004

Shijiazhuang No.2 Middle School, Shijiazhuang, Hebei, 050004, China

**摘要:** 最小二乘线性拟合是新课标选择性必修内容,是中学阶段落实数据建模的重要载体。论文的建模案例重在让学生经历开题、做题、结题的过程,使学生善于用数学的视角观察世界,用数学的思维思考世界,用数学的语言表达世界。

**Abstract:** The least square linear fitting is the selective compulsory content of the new curriculum standard, and it is also an important carrier to implement data modeling in middle school. The modeling cases in this paper focus on letting students experience the process of opening, doing and concluding questions, so that students are good at observing the world from a mathematical perspective, thinking about the world with mathematical thinking and expressing the world with mathematical language.

**关键词:** 数学建模; 线性拟合; 最小二乘法

**Keywords:** mathematical modeling; linear fitting; least square method

**基金项目:** 本文系2018年度河北省“三三三人才”人才资助项目课题《生涯规划在数学课堂中的渗透》成果(项目编号:A201803084)。

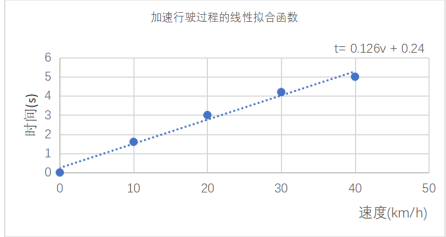
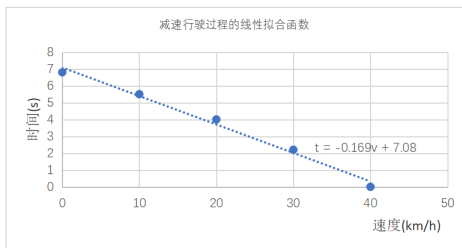
**DOI:** 10.12346/sde.v3i5.3681

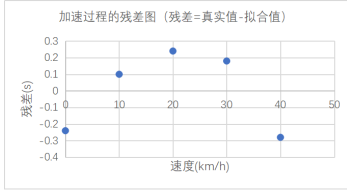
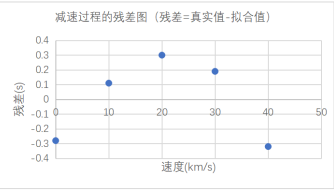
《普通高中数学课程标准(2017年版)》将数学建模作为数学核心素养提出,它在发展学生的创新能力、实践能力、科研能力等方面有重要的挖掘意义和育人价值。此外,数学建模可以很完备地将另外五个数学核心素养串联在一起,因此建模过程可以综合展现学生的思维品质、关键能力以及情感、态度与价值观<sup>[1]</sup>。

对教师而言,如何选择研究课题,如何在课堂设计建模任务以引导学生实施建模活动,如何利用建模贯穿各核心素养<sup>[2]</sup>,以及如何高效组织课堂讨论等,都是极大的挑战。下面与大家分享一则建模案例,重在让学生经历开题、做题、结题的过程,教师可以提前把问题抛给学生,让学生预习和准备,也可根据实际学情和课时有侧重性地选择研究。

【作者简介】甄健华(1988-),女,中国河北石家庄人,硕士,一级,从事基础数学研究。

问题背景	为了限制车辆行驶速度,减少交通安全事故,通常在校园、居民小区等行人较多的道路中间设置路障	引导学生衡量各种因素的权重大小,关注主要因素,忽略次要因素,从而简化模型过程																								
课堂活动	教师提问:请同学们思考影响路障减速效果的因素有哪些? 学生回答:路障间距、路障高度、路障形状、路障材料、车辆行驶速度…… 教师点评:建立数学模型,往往不会从一开始就考虑多个因素,而是从最重要的因素开始逐个增加,在大家已有的数学、物理方面知识储备的基础上,我们不妨先考虑其中一个因素——路障间距																									
提出问题	问题:现某小区需要限制车速 $\leq 40\text{km/h}$ ,相距多远设置一个路障合适? 教师分析:路障间距过大,车速容易超过 $40\text{km/h}$ ;路障间距太小,会影响成本以及驾驶人员的舒适感。所以进行路障规划、安装时,考虑路障间距很有意义	问题贴近生活,让学生体会解决问题的意义所在,激发对数学建模的兴趣																								
问题分析	下面来细化车辆经过路障的行驶情况: ①汽车过路障时速度接近零,过路障后加速; ②车速达到 $40\text{km/h}$ 时司机看到下一路障而减速,至路障处车速接近零; ③如此循环以达到限速的目的	教师不要过多给学生留白时间,否则会冲淡本堂课的主题。该部分呈现的目的是让学生经历建模的全过程,为后续自己做项目或者参加比赛奠定基础																								
问题假设	假设相邻路障之间汽车作匀加速运动和匀减速运动																									
收集数据	加速行驶过程的数据 <table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>速度(km/h)</td><td>0</td><td>10</td><td>20</td><td>30</td><td>40</td></tr> <tr><td>时间(s)</td><td>0</td><td>1.6</td><td>3.0</td><td>4.2</td><td>5.0</td></tr> </table> 减速行驶过程的数据 <table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>速度(km/h)</td><td>40</td><td>30</td><td>20</td><td>10</td><td>0</td></tr> <tr><td>时间(s)</td><td>0</td><td>2.2</td><td>4.0</td><td>5.5</td><td>6.8</td></tr> </table> 采集数据的方式:①查资料;②测试(工具:秒表)	速度(km/h)	0	10	20	30	40	时间(s)	0	1.6	3.0	4.2	5.0	速度(km/h)	40	30	20	10	0	时间(s)	0	2.2	4.0	5.5	6.8	
速度(km/h)	0	10	20	30	40																					
时间(s)	0	1.6	3.0	4.2	5.0																					
速度(km/h)	40	30	20	10	0																					
时间(s)	0	2.2	4.0	5.5	6.8																					
建立模型	<b>Step1:</b> 限速 $v_{\max}=40\text{km/h}$ ; 加速行驶:距离 $s_1$ ; 时间 $t_1$ ; 加速度 $a_1$ ; 减速行驶:距离 $s_2$ ; 时间 $t_2$ ; 减速度 $a_2$ ; 教师:根据运动学知识,请用数学符号和式子来表示这些量之间的关系。  学生: $S_1 = \frac{1}{2}a_1t_1^2; S_2 = \frac{1}{2}a_2t_2^2; V_{\max} = a_1t_1 = a_2t_2$ .  相邻路障间的距离为: $S = S_1 + S_2 = \frac{V_{\max}^2}{2} \left( \frac{1}{ a_1 } + \frac{1}{ a_2 } \right)$  所以给定 $v_{\max}$ 后,由收集的数据估计出 $a_1$ 和 $a_2$ ,就可求得路障间距	该部分涉及物理运动学方面的知识,适合高一及以上年级学生使用																								
	<b>Step2: 目标数学化</b> 根据收集的数据,做出散点图,分析总体趋势。 教师提问1:用什么样的函数关系可以近似反映观察到的规律? 学生连点、画线、交流,发现拟合直线不唯一,引起学生关注寻求最佳拟合直线。 教师提问2:“最佳”一词显得抽象、模糊,不易测评,能否从数学的视角,用数学的方式和语言进行度量、描述? 学生1:点在直线上的数量越多,拟合效果越好。 学生2:所有点与直线的距离之和越小,拟合效果越好。 研究目标:求合适的参数 $a, b$ ,使得数据点 $(t_i, v_i) (i=1, 2, \dots, n) l=bt+a$ 到直线 $v=bt+a$ 的距离之和最小——“最小”。  教师提问3:请学生构建“距离和”的表达式,并探讨如何求解参数 $a, b$ 。 学生3:数据点到直线的垂直距离之和 $\sum_{i=1}^n d_i = \sum_{i=1}^n \frac{ a+bt_i-v_i }{\sqrt{a^2+b^2}}$ 。 学生4:数据点到直线的纵向距离之和 $\sum_{i=1}^n d_i = \sum_{i=1}^n  a+bt_i-v_i $ 。 学生5:数据点到直线的横向距离之和 $\sum_{i=1}^n d_i = \sum_{i=1}^n \left  \frac{v_i-a}{b} - t_i \right $	从散点图观察到这些点大致分布在一条直线周围,所以用线性函数近似这个规律比较合适。 探究成果:时间 $t$ 是关于速度 $v$ 的线性函数,故设 $v=bt+a$ ( $a, b$ 为待定参数)。 探究成果:用“距离”来度量拟合效果。 教师引导学生思考上述三种距离本质相同吗																								

	<p>教师引导：如何求绝对值函数的最小值？缺点是什么？有没有其它方法既能度量距离，又方便计算？</p> <p>学生6：带绝对值的函数一般需要零点分段法求最值，比较复杂，可以借助数据点到直线的纵向距离的平方和 <math>\sum_{i=1}^n (a+bt_i-v_i)^2</math> 来度量距离</p>	<p>其实三者从数量仅仅相差一个系数，但“纵向距离和”形式最简洁。</p> <p>——“一乘法”； ——“二乘法”</p>
<p>建立模型</p>	<p>Step3: 最小二乘法参数的估计<sup>[3]</sup></p> <p>1. 研究目标：求参数 <math>a, b</math>，使得 <math>f(a, b) = \sum_{i=1}^n (a+bt_i-v_i)^2</math> 最小。</p> <p>教师提问：<math>\sum_{i=1}^n (a+bt_i-v_i)^2</math> 是函数吗？哪些是已知量，哪些是未知量？</p> <p>二元函数最值怎么求？</p> <p>2. 教师引导，如果固定其中一个变量，则二元函数最值问题转化为一元二次函数最值问题。</p> <p>①将 <math>f(a, b)</math> 看作关于 <math>a</math> 的一元二次函数。</p> $f(a, b) = \sum_{i=1}^n (a+bt_i-v_i)^2 = na^2 + 2a \sum_{i=1}^n (bt_i-v_i) + \sum_{i=1}^n (bt_i-v_i)^2$ <p>其对称轴是 <math>a = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (v_i - bt_i)</math>，何时取最小值？</p> <p>②将 <math>f(a, b)</math> 看作关于 <math>b</math> 的一元二次函数。</p> $f(a, b) = \sum_{i=1}^n (a+bt_i-v_i)^2 = b^2 \sum_{i=1}^n t_i^2 - 2b \sum_{i=1}^n t_i(v_i-a) + \sum_{i=1}^n (v_i-a)^2$ <p>其对称轴是 <math>b = \frac{\sum_{i=1}^n t_i(v_i-a)}{\sum_{i=1}^n t_i^2}</math>，何时取最小值？</p> <p>联立得二元一次方程组 <math>\begin{cases} \sum_{i=1}^n [v_i - (a+bt_i)] = 0 \\ \sum_{i=1}^n \{ [v_i - (a+bt_i)] t_i \} = 0 \end{cases}</math>，求解得：<math>\begin{cases} a = \bar{v} - b\bar{t} \\ b = \frac{\sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v})(t_i - \bar{t})}{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2} \end{cases}</math></p>	<p>对于高一学生可以通过这种固定一个变量的方法将二元问题转化为一元二次函数求解，计算量大幅降低；对于高二已学习了导数的学生，教师可以引导学生利用导数去求解；也可以适当地补充说明这就是高等数学中偏导数的内容</p>
<p>模型求解</p>	 <p>加速行驶过程的线性拟合函数 <math>t = 0.126v + 0.24</math></p> <p>以小组为单位，代入数据，计算参数 <math>a, b</math> 的值，其中 <math>1\text{m/s} = 3.6\text{km/h}</math>。</p> <p>加速行驶过程的加速度 <math>a_1 = \frac{1}{0.126} \approx 2.19\text{km/h}^2 = 0.608\text{m/s}^2</math>。</p>  <p>减速行驶过程的线性拟合函数 <math>t = -0.169v + 7.08</math></p> <p>加速行驶过程的加速度 <math>a_2 = -\frac{1}{0.169} \approx -5.917\text{km/h}^2 = -1.643\text{m/s}^2</math>；</p> <p><math>V_{\max} = 40\text{km/h} = 11.11\text{m/s}</math>，路障间距</p> $S = S_1 + S_2 = \frac{V_{\max}^2}{2} \left( \frac{1}{ a_1 } + \frac{1}{ a_2 } \right) \approx 66\text{m}$	<p>让学生分析，由得到的回归方程知回归直线经过平均值点 <math>(\bar{x}, \bar{y})</math>，引导学生思考样本的随机性，回归方程的随机性以及随机误差</p>

模型 检验 与 评价	<p>教师提问 1: 车辆加速阶段, 如果车速达到 50km/h, 代入拟合函数 <math>t=0.126v+0.24</math>, 此时所用时间一定是 6.54s 吗?</p> <p>教师提问 2: 怎样评价所得直线的拟合效果? ——引入残差的概念。</p> <p>教师提问 3: 请同学们画出两组数据的残差图, 观察拟合效果。</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;">   </div> <p>教师总结: 残差的绝对值都很小, 并且在 0 这条直线上上下下均匀随机分布, 说明所得直线拟合效果理想</p>	<p>由于数据的随机性, 拟合的函数只能近似反映车速和时间的关系。</p> <p>通过残差图观察拟合效果, 引导学生学会分析数据, 体会蕴含的统计思想, 培养学生数据分析素养</p>
---------------------	--	---

现在的课堂教学还没有完全做到让学生学会用数学, 所以我们的学生很有必要学习数学建模。数学建模在中学的发展还处于起步阶段, 建模素材和形式不能照搬大学使用。现实中我们缺少一大批有这方面知识和能力的教师充当引路人, 所以创造机会、积极探索、共同积累经验显得尤为重要。我们相信当代中学教师的探索和开拓性工作必将对未来的中学数学建模教学产生积极影响。

## 参考文献

- [1] 《普通高中数学课程标准(2017年版)解读》[Z].
- [2] 张淑梅,何雅涵,保继光.中学数学核心素养的统计分析[J].课程·教材·教法,2017(10):50-55.
- [3] 姜启源,谢金星,叶俊.数学模型[M].5版.北京:高等教育出版社,2018.

(上接第 133 页)

用。另外, 运用体态律动还可以增强学生的理解能力。大部分小学生并未接受过专业训练, 所以他们并不能深入理解教材音乐中的节奏旋律, 所以教师需要在课堂教学过程中锻炼学生的音乐理解能力, 从而提升学生的表现力, 在音乐教学中运用体态律动就能够让抽象的音乐通过肢体语言的形式表现出来, 以便于学生去理解音乐当中的内涵和创作者所传达出来的思想感情, 这就使得音乐对于学生来说不再是那些音符曲调的组合, 而是变为了一种能给人带来启发、传递情感的媒介, 这使得学生对音乐学习的兴趣更加浓烈, 从而让学生受益无穷。

## 4 结语

总而言之, 在小学音乐教学中运用体态律动能够发挥激发学生积极性、提升学生的综合素质的重要作用。教师

需要充分考虑小学生的年龄特点和对音乐的欣赏能力, 将体态律动充分应用于音乐教学的各个方面, 包括入门教学和音乐表演, 让学生在充分了解体态律动的基础上, 发挥体态律动对音乐教学的重要作用。与此同时, 教师要发挥自身的引导作用、为学生做示范等方式来强化体态律动的运用效果、提升音乐课堂教学的质量, 为学生以后的音乐学习奠定基础。

## 参考文献

- [1] 高广.探析体态律动教学在小学音乐课中的发展与运用[J].女报(时尚版),2019(11):1.
- [2] 王春芳.别样的传情——论小学音乐教学中体态语言的运用[J].读与写(教育教学刊),2015(7):52-53.
- [3] 陈瑶.达尔克罗兹体态律动教育学模式在小学音乐教学中的应用研究[D].重庆:重庆师范大学,2015.