《计算方法》课程插值与拟合重难点辨析

Analysis of key points and difficult points of interpolation and fitting in Calculation Methods

赵宏艳 李铭明

Hongyan Zhao Mingming Li

上海工程技术大学数理与统计学院 大学数学系 中国·上海 201620

School of Mathematics and Statistics, Shanghai University of Engineering and Technology, Department of Mathematics,
Shanghai, 201620, China

摘 要:《计算方法》课程主要介绍解非线性方程、插值与拟合数据、解常微分方程等数学问题的数值算法,并展开误差、效率和稳定性等方面的分析。本课程内容是设计程序和分析数值结果的依据和基础,是用计算机进行科学计算的一个重要环节。教学实践表明,部分学生对某些算法的理解不够准确和深入,解决实际问题时会出现选错算法等问题。本文就插值与拟合的部分问题做了较详细的重难点辨析,给出深入理解概念和性质的思路和方法,提高学生认识问题、解决问题能力。

Abstract: The course “Calculation Method” mainly introduces the numerical algorithm for solving nonlinear equations, interpolation and fitting data, solving ordinary differential equations and other mathematical problems, and expands the analysis of error, efficiency and stability. The content of this course is the basis and foundation of designing program and analyzing numerical results. It is an important part of scientific calculation with computer. The teaching practice shows that some students’ understanding of some algorithms is not accurate and deep enough, and some problems such as choosing wrong algorithms may occur when solving practical problems. In this paper, some problems of interpolation and fitting are analyzed in detail, and ideas and methods are given to deeply understand concepts and properties, so as to improve students’ ability to understand and solve problems.

关键词: 计算方法; 插值与拟合

Keywords: computing method; Interpolation and fitting

DOI: 10.36012/sde.v3i1.2874

1 引言

计算方法,也称数值分析、数值计算方法等,是一门应用性极强的基础课,主要针对数学问题,研究适用于科学计算与工程计算的数值计算方法及相关理论。它是程序设计和对数值结果进行分析的依据和基础,是用计算机进行科学计算全过程的一个重要环节^[1]。在我校,本门课程由数理与统计学院工程数学教学团队开设,所用教材为刘玲、王正盛主编的《数值计算方法(第2版)》^[2]。

通过《计算方法》课程的教学,使学生掌握计算机现代数值方法的基本概念、基本理论与基本方法,使学生掌握如何将一种数学问题转化为数值问题的基本方法,提高学生用计算机解决数学问题的能力,培养学生综合的素质和提高学生解决问题的能力,为今后的工程、软件工程实际应用打下坚实的数学数值计算基础。

本课程有别于通常的公共数学课程,属于数值数学的范畴,伴随计算机的发展而逐步完善,具有极强的可操作性,但又不能仅仅满足于会用,而要深度理解其中的数学原理。课程围绕解非线性方程、解线性方程组、函数逼近、计算定积分或导数和解常微分方程等数学问题展开,每一个问题都提供数种不同的数值解法,如可用来解非线性方程的二分法、简单迭代法、Steffensen 加速迭代法、Newton 迭代法、弦截法等,而解线性方程组仅 Gauss 消元法主要就有四种(顺序消元、列主元消元、行主元消元和全主元消元)。这些方法往往不存在优劣之分,但在使用条件、计算稳定性、复杂度和误差精度等方面有所区别。因此,在学完基本概念、理论和方法后,加强辨析,深入理解各种算法在使用条件、计算稳定性、复杂度和误差精度等方面的联系和区别,成为编程应用之前亟需考虑的重要环节。

笔者本学期采用线上直播教学模式,在学习通中布置了一些关于概念理解的题目,根据题目反馈和学生问问题情况,较容易发现学生辨析不清、易错易混淆的概念和性质。这里就课程第四章《函数逼近的插值与拟合》中的部分问题进行讲解。

2 插值与拟合难点辨析

《函数逼近的插值与拟合》主要分为插值和拟合两部分内容。插值法介绍了 Lagrange 插值法、Newton 插值法、Hermite 插值法和三次样条插值。而拟合的部分介绍了连续函数的最佳平方逼近和离散数据的最小二乘法。结合本校学科情况,按备课组统一安排,本章重点是 Lagrange 插值法、Newton 插值法、三次样条插值和最小二乘法。下面就这几个概念对学生辨识不清的部分重难点做辨析。

问题(一):插值和拟合这两个概念有区别吗?

辨析:教材中的插值(Interpolating),一般是指构造多项式函数,使得该函数对应曲线通过指定的节点。拟合(fitting),一般是指构造多项式函数,其与原曲线之间的平方误差面积最小,或者与相应离散数据点的纵坐标之间的平方误差和最小。可以看到,插值和拟合要实现的目标完全不同,而且对于离散数据,拟合一般适用于拟合多项式次数较低,但数据点较多的情形,故基本上无法满足全部插值的要求。

问题(二):对于同样的节点,Lagrange 插值多项式和 Newton 插值多项式总是相同吗?

辨析:不一定。若给定 $n+1$ 个互异节点 x_i ,构造 n 次插值多项式 $p(x)$,则 $p(x)$ 存在且唯一,即此时构造的 n 次 Lagrange 插值多项式和 n 次 Newton 插值多项式是相同的。注意这里的“互异”,以及次数要求。反之,若有重节点,则插值多项式不存在或不唯一,那么 n 次 Lagrange 插值多项式和 n 次 Newton 插值多项式也就不存在或不相同。若给定 $n+1$ 个互异节点,但构造低于 n 次的 Lagrange 插值多项式或 Newton 插值多项式,实际插值节点个数要少于 $n+1$,节点选取方法不同,即便次数相同,多项式亦不同。

问题(三):给定四个互异节点,构造 3 次 Lagrange 插值多项式,和三次样条插值多项式,两者相同吗?

辨析:一般不同。构造三次样条插值多项式时,需要再额外提供两个插值条件,才能唯一确定。插值条件常为首末两端点的一阶导数或者二阶导数值。所以,一般而言,三次样条插值多项式与 3 次 Lagrange 插值多项式并不相同。三次样条插值一般是分段函数,每一段上的数学表达不同,而 3 次 Lagrange 插值多项式在整个插值区间上有统一的多项式表示。3 次 Lagrange 插值多项式可以看作是三次样条插值多项式的特例。

问题(四):给定函数 $f(x)$ 及 $n+1$ 个互异节点 $(x_i, f(x_i))$ ($i=0, 1, 2, 3$),构造 n 次 Lagrange 插值多项式,和 n 次最佳平方逼近多项式,两者相同吗?

辨析:一般不同。插值法和最佳平方逼近法构造多项式的构造目标完全不同。插值法只用到节点以及节点处的函数值,对于原本的函数 $f(x)$ 或者说 $f(x)$ 在其它点的情形都“漠不关心”。最佳平方逼近法着眼于所构造曲线和原曲线在整个区间上的平方误差面积达到最小。因此,要想求出最佳平方逼近函数,仅知道节点处的函数值是不够的,必须还要知道原本函数在整个区间的解析表达式。除非巧合,Lagrange 插值多项式和最佳平方逼近多项式一般不同,并且,Lagrange 插值曲线与原曲线平方误差面积一般比最佳平方逼近曲线的平方误差面积要大。

问题(五):给定 $n+1$ 个互异节点 x_i ,构造 n 次 Lagrange 插值多项式,和利用最小二乘法解出的 n 次多项式,两者是否相同?

辨析:相同。最小二乘法的本质是构造多项式满足插值方程组,但由于节点个数往往远远大于 $n+1$,导致矛盾方程组,此时解出的 n 次多项式只能插值个别节点,甚至无法插值任何节点。但当节点个数恰好是 $n+1$ 时,插值方程组的系数矩阵为非奇异方阵,方程组有唯一解,插值多项式存在且唯一。此时,最小二乘法构造的多项式满足所有节点的插值条件,和 n 次 Lagrange 插值多项式完全一致。

3 结语

《计算方法》课程的目的是为理工科专业学生利用计算机解决工程数学问题开启引路之门,课程内容丰富、信息量大、涉及学科广泛、有一定难度,部分学生存在一知半解,

(下转第 107 页)

-
- [J]. 一线笔者. (2): 4-8.
- [2] 贵丽萍、黄建英、周勇、林妮. 英语阅读教学中的思维活动: 评判性阅读视角 [M]. 浙江大学出版社, 2011.
- [3] 张淳. 2009. 高中英语批判性阅读的教学设计 [J]. 山东师范大学外国语学院学报 (基础英语教育). (2): 66-69.
- [4] Flynn, L. L. 1989. Developing critical reading skills through cooperative problem solving [J]. Reading Teacher. 42/9; 664-668.
- [5] 刘伟、郭海云. 2006. 批判性阅读教学模式实验研究 [J]. 外语界. (3): 14-18, 23.
- [6] Lwein, L. 2010. Teaching critical reading with questioning strategies [J]. Educational Leadership. 67/6:23-26.
- [7] 张冠文. 2009. 在初中英语教学中展开评判性阅读的教学尝试 [J]. 中小学外语教学 (中学篇). (12): 20-24.
- [8] 封萍. 2015. 评判性阅读策略在高中英语阅读教学中的运用 [J]. 江苏教育·中学教学 (课程与教学). (2): 47-49.
- [9] 教育部. 普通高中英语课程标准 (实验) [M]. 北京: 人民教育出版社. 2003: 29.
-

(上接第 100 页)

以深入理解学生的学习特点、学习习惯和学习兴趣点,从而积极地改进下一节课的教学设计,在教学方案当中继续推进生成性资源教学方案,扬长避短地发挥自己的优势之处,改进自己的不足之处,提高教学质量。

3 结语

在《计算机原理》这一门教学内容比较多元,教学原理贯通的课堂当中,教师应当在教学设计当中体现生成性资源的重要价值,积极开发和利用学生思维的生成性资源,并且能够针对班级当中学生具体的思维情况和兴趣特点来设计个性化的教学方案,当学生在课堂上展现出思维火花的时候

积极拓展和延伸,游刃有余地开发课堂,使得生成性资源成为计算机课堂的巨大助力,促进提高课堂质量,保证教学成果。

参考文献

- [1] 中职《计算机原理》课程教学浅谈 [J]. 蔡玲燕. 当代教育实践与教学研究. 2016(02)
- [2] 基于 SSH 的《计算机原理》课程试题库管理系统的设计与实现 [J]. 李湘. 福建电脑. 2017(02)
- [3] 非计算机专业《计算机原理》课程教学实践探索 [J]. 马胜, 唐玉华, 陆洪毅, 王志英. 教育教学论坛. 2018(10)

(上接第 102 页)

听得懂但不会用的情况。本文就第三章中插值和拟合问题涉及的重难点进行了较详细的辨析,强调概念引领、源头辨析,给出了理解和比较算法的途径和方法,提高同学们认识问题和解决问题的能力。

参考文献

- [1] 曩莹. 数值计算方法——算法及其程序设计 [M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2014.
- [2] 刘玲, 王正盛. 数值计算方法 (第 2 版) [M]. 北京: 科学出版社, 2010.