谈高中数学函数研究的典范——三角函数

A Model of Mathematical Function Research in Senior High School—Trigonometric Function

苏文学

Wenxue Su

佛山市顺德区杏坛中学

中国·广东 佛山 528300

Xingtan Middle School, Shunde District, Foshan

City,

Foshan, Guangdong, 528300, China

【摘要】三角函数是一类典型的周期函数,是高中数学的重要组成部分,相较于其他初等函数,三角函数涵盖了几乎所有与初等函数相关的性质及规律,可以说是函数学习研究的最佳范例,在学习高中数学的过程中,师生们认识到这一点对于三角函数的教和学将会大有裨益。

【Abstract】Trigonometric function is a typical periodic function and an important part of high school mathematics. Compared with other elementary functions, trigonometric function covers almost all the properties and laws related to elementary functions. It can be said that trigonometric function is the best example of function learning research. In the process of learning high school mathematics, teachers and students recognize that trigonometric function covers almost all the properties and laws related to elementary functions. Knowing this will be of great benefit to the teaching and learning of trigonometric functions.

【关键词】高中数学;三角函数;周期性

【Keywords】senior high school mathematics; trigonometric function; periodicity

【DOI】10.36012/sde.v1i2.185

1 引言

在高中数学函数部分的学习中,幂函数、指数函数、对数函数与三角函数的内容最基本、应用最广泛的初等函数,是进一步学习其他数学知识的基础,可以说初等函数是代数中最精华的内容之一。

2 三角函数全面覆盖了初等函数研究的相关性质

三角函数,作为基本初等函数的一份子,因其涵盖初等函数的所有属性而变得非常的特殊和重要。而其他初等函数要研究的性质相对都比较单一,诸如单调性、奇偶性、对称性、最值、极值、周期性等性质,这些初等函数大多都只涉及一两种。其中,指数函数和对数函数一般只研究单调性,幂函数虽然种类繁多,但除了类似于这样的函数研究的性质相对复杂些,大部分研究的函数相关性质也不多。而三角函数可以说以上性质它都具备,同时还具备其他初等函数所没有的性质。

例如:已知函数 $f(x) = (\sqrt{3} \cos x + \sin x)^2 - 2\sqrt{3} \sin^2 x$ 。

(1)求函数 $f(x)$ 的最小正周期、对称中心及对称轴;

(2)求函数 $f(x)$ 的最小值,并写出 $f(x)$ 取得最小值时自变量 x 的取值集合;

(3)若 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,求函数 $f(x)$ 的单调增区间;

(4)若函数 $f(x)$ 向右平移 φ 个单位后($\varphi > 0$),成为偶函数,求 φ 的最小值;

(5)已知 α 是函数 $f(x)$ 的极大值点($\alpha < 0$),求 α 的最大值。

从以上这道题可以看出,一个三角函数的题目,由它提炼出的问题几乎可以覆盖函数每一个基本性质,这一点是其他函数无法做到的。

而在这些三角函数性质中最典型的的就是周期性,周期性是指函数在定义域内其相关的函数性质表现为周而复始重复出现的函数特征,它必须是教学的重点,当然也是难点之一。例如,因为周期性导致的正弦函数 $f(x) = \sin x$ 和余弦函数 $f(x) = \cos x$ 的对称中心、对称轴、单调性、最值、极值以及正余弦函

数互为倒数等都是周而复始的,和其他初等函数比起来只有三角函数能够很好地被利用去讲解这些内容。

3 三角函数提供了多种完美简洁的公式,在计算中实现化繁为简

三角函数这部分内容提供了很多完美而简洁的公式,这个学习过程令学生在数学的形式美与简洁美方面得到很好的熏陶,这在其他的数学模块中并不多见^[1]。请看下面两个例子。

①学生学完三解函数之后,相信对于公式 $\sin^2x+\cos^2x=1$ 一定会有深刻的认识,这个简洁而完美的等式,可以解决很多棘手的计算问题,例如,三解函数万能公式(之一)的推导:

$$\sin 2x=2\sin x\cos x=\frac{2\sin x\cos x}{\sin^2x+\cos^2x}=\frac{2\sin x\cos x/\cos^2x}{(\sin^2x+\cos^2x)/\cos^2x}=\frac{2\tan x}{1+\tan^2x}$$

人们看到利用 $\sin^2x+\cos^2x=1$ 这个公式很自然地推导出了以上公式,还有类似圆方程 $x^2+y^2=r^2$ 这样的方程,利用三角换元也是常用的技巧,可以极大地简化计算过程,这种方法不仅好看而且好用。

②欧拉恒等式: $e^{i\pi}+1=0$ (学生不知道这个公式,但学习三角函数时教师可以介绍,以激发学生的学习兴趣),它将数学里最重要的几个常数联系在一起,两个超越数:自然对数的底 e 、圆周率 π ;两个单位:虚数单位 i 和自然数的单位 1 ;以及数学里常见的 0 。它的推导方法有很多,其中借助于复数的三角形式是其中的一种,对于任意实数 x ,有 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$,令 $x=\pi$ 代入上式,则可得出欧拉恒等式。

4 三角函数的应用广泛

时至今日,人们无忧无虑地享受着现代文明下的美好生活,已经越来越离不开高科技带来的便利,而在这一切的背后,数学才是王道。因为所谓的高科技,就当下而言就是数字科技,无论是云计算还是大数据,其背后的逻辑支撑都是数学,都是算法。例如,人工智能的不断进步,其核心就是数学算法的不断改进;高效执行的公共事物方面的大数据统计,其要改善的就是数字统筹的问题。人类文明科技树的攀登要点就两个:硬件的进步和数学的发展,笔者认为这是一种很有前瞻性的预言,数学在现代人的生活中不但重要而且应用广泛。现代数学已经被划分出了很多的分支,每个分支都有着重要而独特的应用,从而构筑了整个数学大厦的辉煌^[2]。

三角函数一般用于计算三角形中未知长度的边和未知的角度,在航海学、天文学、工程学、测绘学以及物理学方面都有广泛的用途;另外以三角函数为模版,可以定义一类相似的函数,叫做双曲函数,常见的双曲函数也被称为双曲正弦函数、

双曲余弦函数等;三角函数(也叫做圆函数)是角的函数,它们在研究三角形、建模周期现象以及许多其他应用中都是非常重要的。

5 三角函数的学习建议

鉴于三角函数有如上这些特点,所以无论教师还是学生对其都应给与足够重视。

①三角函数在知识方面的一大特点就是公式数量庞大,公式的各类变形也多,都是成组出现的,每一组都有多个公式。例如,诱导公式就有六七组之多,而每一组里又包含两到三个具体的公式,这对于初学者来说是个不小的挑战,而且必须全部熟记掌握,因为这是进一步学习三角函数的基础,在以后数学的学习中会一直有用。笔者建议可以把这些公式做成思维导图的形式来加深记忆和理解,这种系统性记忆的方式效果会好很多。

②三角函数能力与技巧方面的提升,主要还是通过大量的做题(能力题和拔高题为主)和及时的归纳总结才能实现。像 $\sin^2x+\cos^2x=1$ 这个公式只有做了较多相关的题目,才能在各种题型中做到灵活运用,特别是在其他知识模块中对于三角函数的涉及基本都是能力题,这方面的题目也是近些年的高考热门题,在教学中要有意识的进行训练和强化,三角函数性质图像和向量、参数方程、解析几何等知识点都会有所涉及。在有关圆锥曲线的参数方程的章节中,其中的圆、椭圆和双曲线的参数方程都是三角形式的,如椭圆标准方程: $\frac{x^2}{a^2}+$

$$\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0) \text{ 的一个参数方程 } \begin{cases} x=a\cos\varphi \\ y=b\sin\varphi \end{cases} (\varphi \text{ 为参数}), \text{ 这样的}$$

参数方程绝不是方程形式的简单改写而已,学生在学过之后就可以知道,它确实极大地方便了计算,特别是一些有关圆锥曲线的复杂计算,用了参数方程代替标准方程后,可以取得令人欣喜的化简效果,从而提高计算效率。

以上几个方面就是笔者对高中数学函数研究的典范——三角函数的认识,希望这些认识可以帮助一线教师更好地进行三角函数的教学,也可以帮助学生更用心地、更好地理解 and 掌握三角函数。

参考文献

- [1]李泽坤.高中数学三角函数的学习心得初探[J].学周刊,2019(12):71.
- [2]王晗青.高中数学中三角函数学习的心得与体会[J].课程教育研究,2018(17):142.