随机变量和的概率密度函数的教学设计

The Teaching Design of the Probability Density Function of Sum of Random Variables

宋月 冯海林

Yue Song Hailin Feng

西安电子科技大学概率统计系

中国·陕西 西安 710071

School of Mathematics and Statistics, Xidian University,

Xi'an, Shaanxi, 710071, China

【摘要】随机变量和的密度函数的求法是概率论教学中的重点,也是难点之一,学生往往不能通过卷积公式求出正确的和的概率密度函数。基于此,论文就随机变量和的概率密度函数的教学设计进行新的探索,设法通过生活中简单的例子讲授卷积的含义,让学生能够深刻理解卷积的本质,从而掌握随机变量和的密度函数的求法。

【Abstract】Finding the density function of the sum of random variables is one of the key and difficult points in the teaching of probability theory. Students are often unable to find the probability density function of the correct sum by the convolution formula. Based on this, this paper makes a new exploration on the teaching design of probability density function of sum of random variables. We try to teach convolution through simple examples in life, so that students can deeply understand the essence of convolution, and master the method of calculating the density function of the sum of random variables.

【关键词】二维随机变量;概率密度函数;教学设计

【Keywords】two dimensional random variable; probability density function; teaching design

【DOI】10.36012/sde.v2i2.1214

1 引言

随机变量和的密度函数是概率论中二维随机变量函数部分的一个教学内容,从多年的教学中发现学生对这部分的内容掌握不好,主要因为:一是密度函数公式的推导需要较好的数学基础,比较抽象;二是计算能力跟不上,最主要是卷积公式使用过程中积分上下限的确定有困难。鉴于此,为了学生能更好地掌握随机变量和的密度函数公式和后续课程的学习,本文尝试用生活中的例子解释卷积、从卷积公式的内涵出发通过图示直观计算卷积,多种方法讲解卷积公式^[1]。

2 概率论中两个随机变量和的密度函数公式的推导

定理①:设随机变量 (X, Y) 的联合密度函数是 $P(x, y)$,

令 $Z=X+Y$,则 Z 的概率密度函数为 $P_Z(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty} P(x, z-x)dx$ 。

证明思想:要求的概率密度函数,沿用上节课讲的分布函数法,首先求 Z 的分布函数 $F_Z(z)$,即

$$F_Z(z)=P(Z\leq z)=P(X+Y\leq z)=\iint_{x+y\leq z} P(x, y)dxdy \quad (1)$$

乍一看,这积分积不出来,怎么办?引导学生思考,按分布函数的定义:

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^z P_Z(z)dz \quad (2)$$

(1)式能不能通过一些数学手段变成(2)的形式呢?

当然可以,把(1)的二重积分在 $x+y\leq z$ 的区域化成累次积分,详细推导运用定积分换元法和交换积分次序得到:

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^z \left(\int_{-\infty}^{z-x} p(x, z-x)dx \right) dz \quad (3)$$

从而

$$P_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} P(x, z-x)dx \quad (4)$$

如果二重积分化成累次积分过程中采用Y型区域定限,相应的 Z 的概率密度公式为:

$$P_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} P(z-x, x)dx \quad (5)$$

当 X 和 Y 相互独立时,有 $P_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} P_X(z-x)P_Y(x)dx$ 或

者 $P_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} P_X(x)P_Y(z-x)dx$ 。

该公式是著名的卷积公式,可以记成:

$$P_Z(z)=P_X(x)*P_Y(y) \quad (6)$$

3 引入实例,讲述卷积的思想

卷积公式完全是通过数学推导得到的,从数学的角度它

仅仅是一种数学运算,比较抽象。下面,从生活中寻找相应的例子解释卷积的思想。

假如,某人有一段时间身体不舒服,每天需要去医院输液,药效在身体中随着时间是不断衰落直至失效,药效衰落的程度用函数 $P_1(t)$ 表示,为了方便,假定药效衰落的程度就用残留在身体的药量来表达,即 $P_1(t)$ 表示到 t 时刻为止残留的药量。为简便起见,假设药效 3 天就完全失效了,而且药效衰落函数 $P_1(t), t=0,1,2$ 是离散的, $P_2(t), t=0,1,2,3$ 表示 t 时刻新用的药量,也是离散的。总的药效 $P(t)$: 用 t 时刻体内药的总量表示。怎么计算 $P(t)$ 呢?

显然 $t=0$ 时,药效为当天给的药量 $P_2(0)$; 第二天的药效为当天给的药量加上昨天药量的残留,即 $P(1)=P_2(1)+P_1(0)$; 第三天的药效为当天给的药量加上昨天药量的残留和前天药量的残留,即 $P(2)=P_2(2)+P_1(1)+P_2(1)+P_1(0)$, 以此类推……可以得到总的药效(药量) $P(t)$ 的公式: $P(t) = \sum_{i=0}^2 P_2(i)P_1(t-i)$, 这就是离散的卷积公式。换个思路,如果把药效的残留量 $P_1(t)$ 看成是权,离散的卷积公式实质上就是加权求和公式。

实际情况中,药效的衰落是连续变化的,去掉离散型的假定可以得到连续的卷积公式:

$$P(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_2(x)P_1(t-x)dx \quad (7)$$

举一反三,这种思想可以运用到各个领域,物理学中,符合叠加原理的任何一个线性系统都存在卷积;计算机科学中,在模式识别和图像处理领域,更有专门的卷积神经网络,它是目前比较热门的深度学习算法的一种;信号处理中,任一个线性系统的输出都可以通过将输入信号与系统的冲激响应做卷积获得;声学中,原声和一个反映各种反射效应的函数的卷积可以表示回声;统计学中的加权平滑平均就是一种卷积,卷积很多时候都是在各种工程领域常常碰到的常用名词。引导学生引用上述思想来解释信号系统中、计算机科学中、物理学中、声学中的卷积的含义^[9]。可以看出,概率论中的卷积公式仅仅看成是一种数学运算,比较抽象,完全遮盖了卷积的本来面貌,导致学生学习困难。进一步指出,存在复合叠加原理(加权叠加)的任何一个系统都存在卷积。

概率论中的卷积是一种积分运算,用来求两个曲线重叠区域的面积,本质上就是加权求和。针对特殊的概率密度函数的卷积利用卷积思想可以通过图示获得。请看下面的例子:

例 1: 随机变量 X, Y, Z 相互独立,均服从 $[0,1]$ 上的均匀分布,求 $X+Y+Z$ 的概率密度函数。

解: 令 $T=X+Y$, 先求 T 的概率密度函数

由题意 X, Y 的概率密度函数分别为 $P_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}, P_Y(y) = \begin{cases} 1, & y \in [0,1] \\ 0, & y \notin [0,1] \end{cases}$, 则 $P_T(t) = P_X(x) * P_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_X(t-x)P_Y(x)dx$ 。

按照药效的引例, $P_X(x)$ 就是 x 时刻药的药量, $x \in [0,1]$, 也就是连续打 1 个单位长度(h,d), 在一个单位长度内药量均匀输入, 都是 1 单位(mg 等), $P_X(t-x)$ 是残留药量函数, 它表示 x 时刻打的药量 1 单位到 t 时刻时残留的药量, 最晚在 1 单位长度末用药, 药效在 2 单位长度末消失, 因此要计算 t 时刻的总药量, t 必须大于等于 0 小于等于 2, 即, $t \in [0,2]$ 。

当 $0 \leq t \leq 1$, $P_X(t-x)=1, P_Y(x)=1$, 两者重叠部分如图 1, 重叠部分面积为 t , 故 $P_T(t)=t$ 。

图 1 $0 \leq t \leq 1$ 时, 密度函数重叠的部分

当 $1 \leq t \leq 2$, 同理可得 $P_T(t)=2-t$ 。

图 2 $1 \leq t \leq 2$ 时, 密度函数重叠的部分

故 T 的概率密度函数为: $P_T(t) = \begin{cases} t, & t \in [0,1] \\ 2-t, & t \in [1,2] \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

令 $U=T+Z$,

按上述理解, U 的取值范围是 $u \in [0,3]$, 公共部分分别如图 3、4、5:

图 3 $0 \leq u \leq 1$ 时, 密度函数的重叠情况

因此当 $0 \leq u \leq 1$, 公共部分的面积 $P_U(u) = \frac{u^2}{2}$ 。

图 4 $1 \leq u \leq 2$ 时, 密度函数重叠的情形

因此, 当 $1 \leq u \leq 2$, $P_U(u) = 1 - \frac{1}{2}(u-2)^2 - \frac{1}{2}(u-1)^2 = 3u - u^2 - \frac{3}{2}$ 。

图 5 $2 \leq u \leq 3$ 时, 密度函数重叠的情况

因此, 当 $2 \leq u \leq 3$, $P_U(u) = \frac{1}{2}(3-u)^2 = \frac{9}{2} - 3u + \frac{u^2}{2}$ 。

当密度曲线下的重叠部分不是规则图形时, 必须借助积分的办法来求重叠部分的面积, 因而下面介绍数学方法, 主要关注如何定限的问题。

要使卷积公式中的密度函数不为零, 必须满足 $0 \leq t-x \leq 1$, 同时 $0 \leq x \leq 1$, 即在 $t-x$ 图上, t, x 落入区域 D , 如图 6 所示。

图 6 t, x 的区域

所以当 $0 \leq t \leq 1$ 时, $P_T(t) = \int_0^t P_X(t-x)P_Y(x)dx = \int_0^t 1dx = t$ 。

当 $1 \leq t \leq 2$ 时, $P_T(t) = \int_{t-1}^1 P_X(t-x)P_Y(x)dx = 2-t$ 。

图 7 u, x 的区域

令 $U=T+Z$, $P_U(u) = P_T(x) * P_Z(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_T(u-x)P_Z(x)dx$, 当

$0 \leq u-x \leq 2, 0 \leq x \leq 1$ 时, 被积函数为 1, 如图 7 所示, 因而有:

当 $0 \leq u \leq 1$, $P_U(u) = \int_0^u (u-x)dx = \frac{u^2}{2}$;

当 $1 \leq u \leq 2$, $P_U(u) = \int_0^{u-1} (x-(u-2))dx + \int_{u-1}^1 (u-x)dx = 3u -$

$u^2 - \frac{3}{2}$;

当 $2 \leq u \leq 3$, $P_U(u) = \int_{u-2}^1 (x-(u-2))dx = \frac{1}{2} - (u-2) + \frac{(u-2)^2}{2}$ 。

上述例子可以看出, 图示法由卷积概念出发, 比较直观, 但当密度曲线下的重叠部分不是规则图像时, 方法失效了。卷积的数学运算方法无论何时都是适用的, 缺点是比较抽象。两种方法配合使用, 就可以比较容易地计算卷积^[3]。

随后举例求两个服从正态分布的随机变量的和, 两个服从伽马分布的随机变量的和, 进一步引申得到 n 相互独立正态分布和还是服从正态分布, 可加分布函数的概念, χ^2 分布函数的概念。

4 卷积公式的推广和数值解法

两个随机变量和的概率密度会算了, 两个随机变量差的密度函数怎么计算呢? 两个随机变量线性组合的概率密度函数呢? 有如下定理:

定理 2[2, 3]: 设随机变量 X, Y 相互独立, 其概率密度函数分别为 $P_X(x), P_Y(y)$, 则随机变量 $Z=aX+bY+c$ 的概率密度函数为:

$$P_Z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|b|} P_X(x) P_Y\left(\frac{z-ax-c}{b}\right) dx \quad (8)$$

$$\text{或者 } P_Z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|a|} P_X\left(\frac{z-by-c}{a}\right) P_Y(y) dy \quad (9)$$

提醒学生, 该定理的证明思想和证明方法定理 1 的类同, 学生可以自己类似证明。除了课上讲的卷积计算方法, 实际问题中, 如果碰到的密度函数比较复杂, 还可以数值求解卷积。

5 结语

通过对随机变量和的密度函数公式的推导, 给出了概率论中的卷积公式, 卷积的两种计算方法和通俗的卷积的理解, 拓展了卷积的概念和应用, 有利于学生更好的理解和掌握卷积公式。

参考文献

- [1]李贤平. 概率论基础[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010.
- [2]王静, 赵会娟. 卷积公式在求连续型随机变量和分布中的应用[J]. 河北科技师范学院学报, 2015(2): 57-60.
- [3]薛震, 田红霞, 雷英杰. 二维随机变量和、积、商公式的推广[J]. 吉林师范大学学报(自然科学版), 2015(3): 81-83.