

# 关于沙堡稳定性的研究

## Study on Stability of Sand Castle

孙明月 齐云龙 李文恺

Mingyue Sun Yunlong Qi Wenkai Li

山东科技大学  
中国·山东 济南 250001  
Shandong University of Science and Technology,  
Ji'nan, Shandong, 250001, China

**【摘要】**沙堡寿命长短与很多因素有关,文章从三个角度进行分析。从沙堡三维几何形状的角度研究,将波浪对沙堡坡面的作用力分为入射阶段、上升阶段和下降阶段进行分析,确定三维几何图形。从沙堡沙水混合比例方面考虑,通过 MATLAB 拟合得到沙水含量与黏着度的非线性回归优化模型,通过粒子群算法得到最佳沙水混合比。从雨水冲刷沙堡是否稳固的情况考虑,利用能量守恒定律,分析坡度大小与冲刷量的关系,得到冲刷量最小时对应的坡度值。

**【Abstract】**The life span of sand castle is related to many factors. The article analyzes from three angles. From the perspective of the three-dimensional geometric shape of sand castle, the force of waves on the slope of sand castle is divided into incident phase, ascending phase and descending phase to determine the three-dimensional geometric figure. Considering sandcastle sand-water mixing ratio, the nonlinear regression optimization model of sand-water content and viscosity was obtained by MATLAB fitting, and the optimal sand-water mixing ratio was obtained by particle swarm optimization algorithm. Considering whether the sandcastle is stable when washed by rain, the relationship between the slope and the amount of washing is analyzed by using the law of conservation of energy, and the slope value corresponding to the minimum amount of washing is obtained.

**【关键词】**非线性回归优化模型;粒子群算法;能量守恒定律

**【Keywords】**nonlinear regression optimization model; particle swarm optimization algorithm; conservation of energy

**【DOI】**10.36012/etr.v2i3.1424

## 1 模型假设

①不考虑水分蒸发对沙堡的影响。②不考虑人为或者动物对沙堡的影响。③仅认为沙子是干燥的,即初始的沙子含水量忽略不计。④忽略小雨对沙堡的影响,仅考虑较强雨水对沙堡的影响。

## 2 符号说明(表 1)

## 3 模型建立与求解

### 3.1 波浪对沙堡的受力分析

#### 3.1.1 入射阶段

在没有波浪来临时,沙粒为静止状态,即处于平衡状态。先来分析沙粒受到的作用力,沙粒受到自身的重力  $G$ ,重力分解为沿坡面向上向下的力。为了平衡,重力沙粒应该还受到了坡面给的支持力  $F$ 。在波浪刚刚入射沙堡时,沙粒会受到波浪

表 1 符号说明

参数	含义
$C_D$	阻力系数
$C_L$	上举力系数
$\rho$	水的密度
$D$	沙粒直径
$u_0$	作用在坡面泥沙颗粒上的流速
$R$	波浪爬高
$H$	波高
$r$	黏着系数
$F_c$	摩擦阻力
$C_u$	不排水的抗剪强度
$q$	单宽流量
$I$	单宽降雨强度
$L$	坡长
$H$	坡高
$\alpha$	坡面与水平面夹角
$\mu$	坡面粗糙系数
$m_i$	水土流变化量
$f$	地表与运动水土流的摩擦力

垂直于坡面向下的冲击力  $P$ 。由于以沙粒为一个单位进行力的分析,当波浪冲进沙粒时,沙粒会受到向上的浮力  $M_1$ ,以及沿着坡面上水平向上向下的力  $F_1$ 、 $F_2$ 。入射阶段沙粒受力分析如图 1 所示。

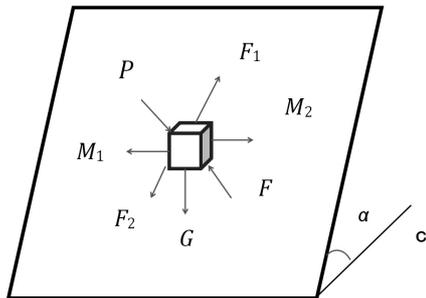


图 1 入射阶段沙粒受力分析图

### 3.1.2 上升阶段

波浪沿着坡面上冲,这时沙粒会受到水对它的一个沿着坡面水平面的提升力  $F_D$ 。除此之外,沙粒还会受到自身的重力  $G$  和坡面对沙粒的支持力  $F_L$ ,以及受到沙粒之间的沿着坡面向下的摩擦力  $f$ 。

### 3.1.3 下降阶段

此时,波浪开始下降,沙粒受到波浪对沙粒的沿着坡面的水平向下的拖拽力  $F_D$ ,以及一个水平的负向动水压力  $F'$ 。除此之外,沙粒还会受到自身的重力  $G$  与坡面对沙粒向上的支持力  $F_L$ 。

分析完波浪对沙粒的作用力之后,根据经典牛顿力学在力的二维、三维空间合成与分析原理,以及空间解析几何的方法<sup>[1]</sup>,得到修正后波浪对坡面的作用力公式。

按照现有的坡面液压压力公式可求得实际压力  $P$ 。根据图 2,实际压力与波浪对坡面冲击合力的角度:

$$\theta = 90^\circ - (\alpha + \beta) \quad (1)$$

$$\tan\theta = \cot(\alpha + \beta) = \frac{1 - \tan\alpha \tan\beta}{\tan\alpha + \tan\beta} = \frac{m' - \tan\beta}{1 + m' \tan\beta}, m = \cot\alpha \quad (2)$$

拖拽力:

$$F_D = \frac{C_D \pi D^2}{2 \times 4 \rho u_0^2} \quad (3)$$

支持力:

$$F_L = \frac{C_l \pi D^2}{2 \times 4 \rho u_0^2} \quad (4)$$

动水压力:

$$F' = \rho(R + 0.5H) \quad (5)$$

水平向上的力:

$$F_1 = (m' - \tan\beta) / (1 + m' \tan\beta) \rho k_p, \beta < 90^\circ - \alpha \quad (6)$$

水平向下的力:

$$F_2 = (m' + \tan\beta) / (1 + m' \tan\beta) \rho k_p, \beta > 90^\circ - \alpha \quad (7)$$

沙堡与地平面的夹角:

$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{2g(H_0 + Z)}}{V_0} \quad (8)$$

式中,  $k_p$  为波浪正向作用时坡面力修正系数。

由此确定最佳三维几何图形应大致为下宽上窄的情况。符合该种形状的三维几何大致分为两种,一种为棱角的棱台,一种为不带棱角的圆台<sup>[2]</sup>。由于圆滑的棱台对波浪对起坡面的分解作用较大,即受到的冲击力相对较小,最终认为最佳三维几何为圆台。

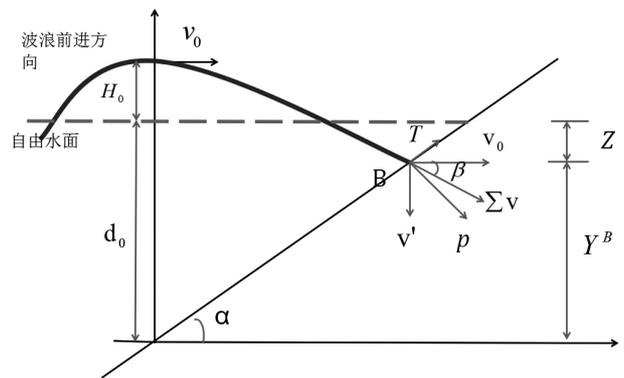


图 2 入射方向与岸坡方向

## 3.2 确定沙水的混合比例

确定沙水的最佳混合比例,使建筑的沙堡稳定性最大。要想得到在不添加其他材料的情况下,沙水的最佳混合比例,应该建立一个沙水混合比例与沙堡稳定性相关的优化模型。黏着系数与摩擦阻力和不排水的抗剪强度的关系公式为:

$$r = \frac{F_c}{C_u} \quad (9)$$

式中,  $r$  为黏着系数;  $F_c$  为摩擦阻力;  $C_u$  为不排水的抗剪强度。

表 2 沙土含水量与黏着系数的关系表

$W_c/\%$	28.2	34.9	40.1	45.1	52.4	59.3
$C_u/\text{kpa}$	55	29.8	20.5	9.9	5.7	4.2
$F_c/(\text{kg}/\text{cm}^2)$	0.44	0.24	0.18	0.09	0.05	0.035
$F_c/C_u$	0.008	0.0085	0.00878	0.00909	0.00877	0.00833

如表 2 所示,把沙子中水含量作为决策变量,黏着系数作为目标函数,以沙子中水的含量理论上为 0%~100%,黏着系数为非负数,为约束条件,构造优化模型,得到方程

$$r = -1.6521e - 0.7Wc^3 + 1.8531e - 050.7Wc^2 - 0.00062Wc + 0.0144 \quad (10)$$

假定沙子初始状态为干燥的,因为题目所求为最佳沙水混合比,得到了该关系式后采用粒子群算法求得该模型解。得到结果为最大值:0.0088797,变量取值:46.7064,即最佳沙水

混合比为 46.7064%。沙子含水量与黏着系数关系如图 3 所示。

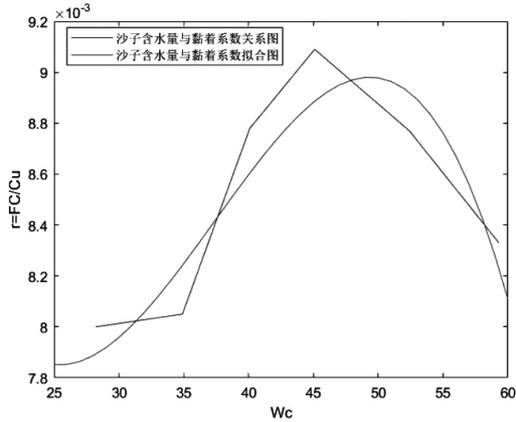


图 3 沙子含水量与黏着系数关系图

### 3.3 雨水对沙堡的影响

要判断模型是否稳固，就要分析雨水对沙堡基础有多大影响，并定量表示雨水对沙堡基础的冲刷作用<sup>[9]</sup>。由于坡度是影响边坡土冲刷的主要地形因素，下面定量表示坡度大小与冲刷量的关系。

①明确坡面水深、流速、流量的计算公式。

水深：

$$h = \left[ \frac{\mu L \cos \alpha}{\tan \alpha} \right]^{0.6} \quad (11)$$

流速：

$$v = \frac{1}{\mu} (\mu H \cos \alpha)^{0.4} \tan^{0.3} \alpha \quad (12)$$

流量：

$$q = v h = I L \cos \alpha \quad (13)$$

②分析雨水对沙堡基础坡面受到的力。

水沙流势能：

$$E_1 = m_1 g h = m_1 g L \sin \alpha \quad (14)$$

摩擦耗能：

$$f = \mu_2 g \left( m_1 + \frac{m_2}{L} \right) x \cos \alpha dx \quad (15)$$

对摩擦力沿运动方向积分，则摩擦耗能为：

$$E_2 = \int_0^L \mu_2 g \left( m_1 + \frac{m_2}{L} \right) x \cos \alpha dx = \mu g \left( m_1 + \frac{1}{2} m_2 \right) \cos \alpha \quad (16)$$

水体流动能：

$$E_3 = \frac{1}{2} m_1 + m_2 v_1^2 \quad (17)$$

③假设在冲刷过程中，物质变动和能量吸收满足能量守恒定律，建立能量守恒方程为：

$$E_1 = E_2 + E_3 \quad (18)$$

当坡高、流量等条件一定时， $m_3$  是坡度  $\alpha$  的函数。当  $\alpha$  达

到最大值时， $m_2$  达到最大值，则该坡度即为所求：

$$m_2 = m_1 \frac{2g L \sin \alpha - 2\mu g L \cos \alpha - v_2^2}{\mu g L \cos \alpha - v_2^2} \quad (19)$$

$$m_2 = m_1 m_1 \frac{2gH - 2\mu g H \cot \alpha - \frac{1}{\mu^2} (\mu H \cot \alpha)^{0.8} \tan^{0.6} \alpha}{\mu g H \cot \alpha + \frac{1}{\mu^2} (\mu H \cot \alpha)^{0.8} \tan^{0.6} \alpha} \quad (20)$$

$$A = \left[ 2gH - 2\mu g H \cot \alpha - \frac{1}{\mu^2} (\mu H \cot \alpha)^{0.8} \tan^{0.6} \alpha \right] \\ = 2\mu g H \csc^2 \alpha - \frac{\mu H}{\mu^2}^{0.8} [0.8 (-\csc^2 \alpha) (\cot \alpha)^{-0.2} (\tan \alpha)^{0.6} \\ + 0.6 (\cot \alpha)^{0.8} (\tan \alpha)^{-0.4} \sec^2 \alpha] \quad (21)$$

$$B = 2\mu g H \cot \alpha + \frac{1}{\mu^2} (\mu H \cot \alpha)^{0.8} (\tan \alpha)^{0.6} \quad (22)$$

$$C = \left[ \mu g H \cot \alpha + \frac{1}{\mu^2} (\mu H \cot \alpha)^{0.8} (\tan \alpha)^{0.6} \right] \quad (23)$$

$$D = 2gH - 2\mu g H \cot \alpha - \frac{1}{\mu^2} (\mu H \cot \alpha)^{0.8} (\tan \alpha)^{0.6} \quad (24)$$

$$m_1 g L \sin \alpha = \mu g L \left( m_1 + \frac{1}{2} m_2 \right) \cos \alpha + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_2^2 \quad (25)$$

$$m_2 = m_1 \frac{AB - CD}{B^2} \quad (26)$$

④通过上式可以得到在不同坡高、冲刷量最大时，坡度的值，如表 3 所示。

表 3 抗冲刷临界坡度计算表

坡面粗糙系数	坡高/m	降雨强度/(mm/min)	坡度
0.05	3	1.75~2.1	35.6~40
	4		36.1~40
	5		35.7~40.5
0.025	6		38.6~41.3
	7		38~40.7
	8		38.2~41.1

采用模型的坡度为 40.2°，得到的抗冲刷临界坡度值为 35.6°~41.1°，说明模型在同等的雨水强度下，冲刷量小，则模型较稳固。

## 4. 结果分析

- ①最佳三维几何为圆台。
- ②最佳沙子中含水量为 46.7064%。
- ③抗冲临界坡度 35.6°~41.1°内雨水冲刷量小。坡度 40.2°，在其范围内，模型比较稳固。

### 参考文献

[1]蔡晓禹,凌天清,唐伯明,等.波浪对散体岸坡冲刷破坏的机理[J].重庆交通学院学报,2006(2):73-76+86.  
[2]祝玉学,张绪珍,王国中.露天矿边坡优化设计方法[J].岩土工程学报,1989(3):11-21.  
[3]石文辉,徐明.公路土质边坡冲刷临界坡度的分析[J].黑龙江交通科技,2008(10):4-5.