

一种基于改进半圆阵的相干信号 DOA 估计方法

DOA Estimation with Improved Semicircular Array in Coherent Environment

韩鹏蕊 李英

Pengrui Han Ying Li

国家无线电监测中心检测中心 中国·北京 100041

The State Radio_monitoring_center Testing Center, Beijing, 100041, China

摘要: 利用空间平滑处理方法能够解决相干信号的波达方向 (direction-of-arrival, DOA) 估计问题。论文提出一种基于均匀圆阵的改进阵列结构, 能够对相干信号进行 DOA 估计并得到二维估计结果。该改进方法是把一个均匀圆阵划分为两个完全一样的半圆形子阵, 并将这两个子阵首尾相连得到改进后的半圆阵。利用这种阵列结构, 可通过空间平滑处理方法恢复信号协方差矩阵的秩, 即补全信号子空间, 进而进行 DOA 估计。仿真结果表明, 一个 L 阵元的子阵能够估计 $L-1$ 组相干信号, 同时将该文所提算法与子空间分解类算法进行了实验对比。

Abstract: The preprocessing scheme of spatial smoothing could circumvent problems encountered in direction-of-arrival(DOA) estimation of coherent signals. In this paper, we propose an array configuration method for identifying DOA of fully correlated signals, which is based on uniform circular array and is able to obtain two-dimensional estimation results. The novel array, we call "double semicircular array", is constructed by dividing a uniform circular array into two identical parts and then combining them end-to-end. Through spatial smoothing processing of data utilizing the array structure, rank loss of signal covariance matrix will be avoided and DOA can be estimated. Simulation results illustrate that subarrays can resolve groups of coherent signals. Performance of this scheme in conjunction with the eigenstructure technique are also described in it.

关键词: DOA 估计; 阵列结构; 空间平滑; MUSIC 算法

Keywords: DOA estimation; array configuration; spatial smoothing; MUSIC technique

DOI: 10.12346/csai.v1i4.8165

1 引言

过去几十年中, 天线阵列由于在波达方向 (DOA) 估计、波束形成等领域具有卓越性能而受到广泛关注。包括 MUSIC、ESPRIT 等在内的众多 DOA 估计方法都能获得较高分辨率的估计结果, 但却无法估计相干信号的波达方向。为了解决相干信号条件下的 DOA 估计问题, 很多学者提出了平滑处理方法, 如空间平滑技术^[1,2]、子空间平滑技术^[3]、时间平滑技术等。然而, 这些算法仅适用于均匀直线阵, 由于直线阵的阵列性质, 无法用来进行二维波达方向估计。一些学者提出了基于高阶累积量和三阶循环矩的方法, 但它们所需要的快拍数相应增多, 这就带来了较高的计算复杂度。此后, 有学者利用一些特殊的阵列结构来进行相干信号

DOA 估计。文章提出了一种通过 Toeplitz 矩阵重构来进行相干信号 DOA 估计的类 ESPRIT 算法, 但其估计性能仍有待提升。此外, 该算法要求天线阵元数量 $N > 2P+1$, 其中 N , P 分别是天线阵元数量和入射信号数量。

为了解决相干 DOA 估计问题, 论文提出一种基于均匀圆阵的新型阵元配置方法, 通过构造新阵列, 利用 L 个子阵进行 $L-1$ 个相干信号组的 DOA 估计。

论文组织如下。首先, 给出了一个信号模型, 并证明了利用半圆阵列可以正确地进行 DOA 估计。其次, 展示了多径环境中基于改进半圆阵列的 DOA 估计算法, 并通过严格的数学推导证明了其可行性。然后, 推导了克拉美罗界 (Cramer-Rao, CRB)。最后, 进行仿真并给出仿真结果,

【作者简介】韩鹏蕊 (1994-), 女, 中国山西繁峙人, 硕士, 从事移动通信设备全球GCF、北美PTCRB一致性认证及运营商入库测试相关的项目管理研究。

对论文算法进行了总结。

在论文中, $[\bullet]^*$, $[\bullet]^T$ 和 $[\bullet]^H$ 分别表示共轭、转置和共轭转置。

2 信号模型

假设一个均匀半圆阵由相同的 M 个全向阵元组成, M 通常是偶数。同时, 假设坐标系的原点是均匀半圆阵的圆心, 也是整个阵列的参考点。可以看出, 均匀半圆阵的阵列流型与圆形阵列的阵列流型基本一致。去除均匀圆阵的最后一半阵元, 可以得到新阵列流型的表达式。图 1 是所得均匀半圆阵的几何形状示意图。

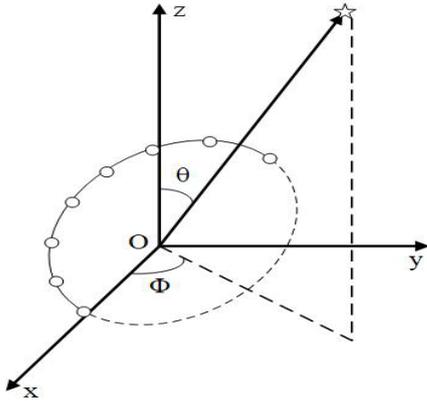


图 1 均匀半圆阵示意图

假设有 K 个远场窄带独立信号源 s_1, s_2, \dots, s_K 入射至接收阵列, 其入射方位角为 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K$ 。那么接收信号 x_i 可表示为:

$$x_i(t) = \sum_{i=1}^K s_i(t) \exp(j2\pi R \sin \theta_i \cos(\phi_i - \gamma_i) / \lambda) + n_i(t) \quad (1)$$

其中, $\gamma_i = 2\pi \frac{i}{M}$, λ 表示信号波长。

式也可以用矢量形式表示为:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (2)$$

其中,

$$\mathbf{x}(t) = [\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_M(t)]^T \quad (3)$$

$$\mathbf{s}(t) = [\mathbf{s}_1(t), \mathbf{s}_2(t), \dots, \mathbf{s}_K(t)]^T \quad (4)$$

$$\mathbf{n}(t) = [\mathbf{n}_1(t), \mathbf{n}_2(t), \dots, \mathbf{n}_M(t)]^T \quad (5)$$

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1, \phi_1), \mathbf{a}(\theta_2, \phi_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_K, \phi_K)] \quad (6)$$

$\mathbf{x}(t)$ 是阵列输出信号矢量, \mathbf{A} 是 $M \times K$ 维的阵列流型矩阵, $\mathbf{n}(t)$ 是加性高斯白噪声矩阵。

$\mathbf{a}(\theta_k, \phi_k)$ 表示第 k 个信号的方向矢量, 可以表示为:

$$\mathbf{a}(\theta_k, \phi_k) = [\exp[jw_k \cos(\phi - \gamma_0)], \exp[jw_k \cos(\phi - \gamma_1)], \dots, \exp[jw_k \cos(\phi - \gamma_M)]]^T \quad (7)$$

其中, $w_k = j2\pi R \sin \theta_k / \lambda$ 。

简化表示:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{S} + \mathbf{N} \quad (8)$$

假设信号和噪声都是平稳的零均值随机过程, 噪声与信号不相关, 并且噪声之间也不相关, 方差相同均为 σ^2 。那么, 阵列输出协方差矩阵可以表示为:

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{X}\mathbf{X}^H] = \mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} \quad (9)$$

其中, $\mathbf{R}_s = E[\mathbf{S}\mathbf{S}^H]$ 表示信号协方差矩阵。

假设信号是不相关或部分相关的, 可以看出信号协方差矩阵是非奇异的, 因此矩阵 \mathbf{R}_s 秩为 K , 即非奇异。同样的, 矩阵 \mathbf{R} 也是非奇异的。通过 \mathbf{R} 的特征分解, 相应的特征值和特征向量可以分别表示为 $\{\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_M\}$ 和 $\{\hat{\mathbf{a}}_1, \hat{\mathbf{a}}_2, \dots, \hat{\mathbf{a}}_M\}$ 。上面提到矩阵秩的特点, 实际上意味着 $\lambda_{K+1} = \lambda_{K+2} = \dots = \lambda_M = \sigma^2$, 并且这些最小特征向量与矩阵 \mathbf{A} 的列正交, 这可以表示为:

$$\hat{\mathbf{a}}_k^H(\theta_k, \phi_k) = 0, \quad k = K+1, \dots, M \quad (10)$$

因此, 由前 K 个特征向量扩展的子空间, 也被称为信号子空间, 与由后 $M-K$ 个特征向量扩展的子空间正交, 也就是噪声子空间。只要 \mathbf{R}_s 是满秩的, 那些高精度的子空间算法就可以利用这种正交性质来进行 DOA 估计。

因此, 均匀半圆阵列能够使用这些子空间方法来进行 DOA 估计。图 2 给出了基于均匀半圆阵, 使用 MUSIC 算法进行二维 DOA 估计的估计结果。

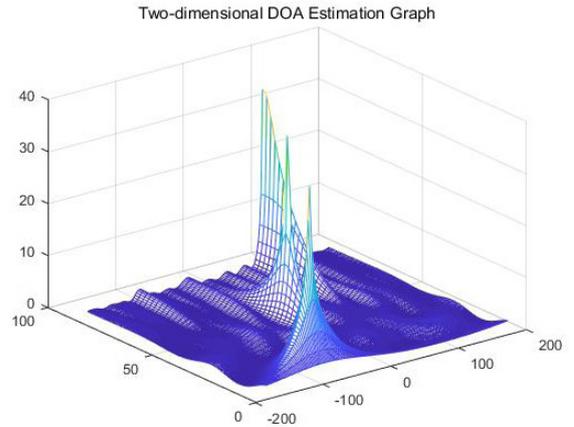


图 2 二维 DOA 估计结果

[8阵元, 信噪比 10dB, 3 个独立信号分别从 $(-90^\circ, 10^\circ)$ 、 $(0^\circ, 50^\circ)$ 和 $(80^\circ, 90^\circ)$ 入射。]

3 使用改进半圆阵进行相干信号 DOA 估计

然而, 实际环境中大多数信号是相干的, 如多径传播, 这可能导致 DOA 估计分辨率降低、漏检等问题。不失一般性, 我们假设 K 个窄带信号 s_1, s_2, \dots, s_K 都是相干的。也就是说, 任意两个信号间都有唯一的幅度和相位关系, 可用一个复系数 α_k 来表示:

$$s_k(t) = \alpha_k s_i(t) \quad i=1, \dots, K \quad (11)$$

以第一个信号为基准对 α_k 进行归一化, 可得:

$$s_k(t) = \alpha_k s_1(t) \quad (12)$$

若 $E[|s_1(t)|^2] = 1$, 将式代入式, 可得:

$$\mathbf{s}(t) = [\alpha_1 s_1(t), \alpha_2 s_1(t), \dots, \alpha_K s_1(t)]^T \quad (13)$$

$$\mathbf{R}_s = \mathbf{a}\mathbf{a}^H \quad (14)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} = \mathbf{A}\mathbf{a}\mathbf{a}^H\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} \quad (15)$$

其中 $\mathbf{a} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K]^T$ 。式可被改写为:

$$\mathbf{R}_s = \begin{bmatrix} \alpha_1\alpha_1^* & \alpha_1\alpha_2^* & \dots & \alpha_1\alpha_K^* \\ \alpha_2\alpha_1^* & \alpha_2\alpha_2^* & \dots & \alpha_2\alpha_K^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_K\alpha_1^* & \alpha_K\alpha_2^* & \dots & \alpha_K\alpha_K^* \end{bmatrix} \quad (16)$$

可以看出, 如果有 K 个相干信号, 则矩阵 \mathbf{R}_s 的秩为 1。

因此矩阵 \mathbf{R} 为奇异阵且 $\lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_M = \sigma^2$ 。这些相干信号会导致信号协方差矩阵的秩缺失, 使得信号子空间的维数小于信号的数量, 信号特征向量会“扩散”到噪声子空间。因此, 像 MUSIC 等基于特征分解的方法无法估计出相干信号的实际波达方向。

考虑到这个问题, 学者们提出了大量方法来解决信号子空间秩亏问题。其中, 空间平滑方法是解决相干信号 DOA 估计的一种重要算法, 其最初由 J.E.Evans 提出, 后经 S.U.pillai 等人改进。关于均匀圆阵的去相关方法也有很多, M.Wax 就提出了一种将均匀圆阵转换为虚拟均匀直线阵的算法, 以便使用空间平滑方法来解相干。后来, C.P.Mathews 在其他学者研究基础上, 扩展提出使用均匀圆阵的二维 DOA 估计方法。在论文中, 我们通过改变阵列排布, 提出一种新的解相干方法。

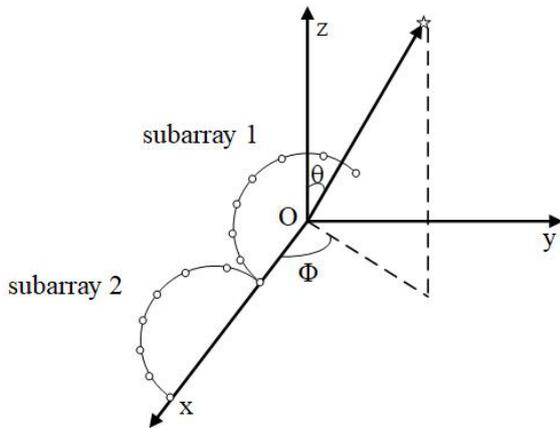


图 3 双半圆阵阵列结构图

将一个 16 阵元均匀圆阵划分为两个子阵, 并将其像两个字母“C”一样首尾相连, 如图 3 所示。当 $1 \leq k \leq 8$ 时, 上半个半圆阵的阵列导向矢量与式(11)一致。可以将下半部分半圆阵看作上半部分的平移, 类似的, 第二个子阵的接收信

号矢量可以表示为:

$$\mathbf{x}_2(t) \triangleq \left[x_{\frac{M+1}{2}+1}(t), x_{\frac{M+1}{2}+2}(t), \dots, x_M(t) \right]^T \quad (17)$$

$$= \mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t)$$

其中 $M = 15$ 。需要说明的是, 下标 $_1$ 表示上半部分子阵, 下标 $_2$ 表示下半部分子阵。矩阵 \mathbf{D} 是一个对角阵, 可表示为:

$$\mathbf{D} = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_K\} \quad (18)$$

$$d_i = \exp[j2\pi R \sin \theta_i 2 \cos \phi_i / \lambda] \quad i = 1, 2, \dots, K \quad (19)$$

因此, 第二个子阵的输出协方差矩阵可以表示为:

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{R}_s\mathbf{D}^H\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} \quad (20)$$

将整个阵列的输出协方差矩阵 \mathbf{R} 定义为两个半圆子阵的平均, 即:

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2}{2} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{R}}_s\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} \quad (21)$$

其中 $\bar{\mathbf{R}}_s$ 表示修正信号协方差矩阵, 可表示为:

$$\bar{\mathbf{R}}_s = \frac{\mathbf{R}_s + \mathbf{D}\mathbf{R}_s\mathbf{D}^H}{2} \quad (22)$$

在这种情况下, 若只有一组相干信号, 则矩阵 $\bar{\mathbf{R}}_s$ 是非奇异的。下面给出证明。

定理: 只有当子阵阵元数量大于相干信号组数时, 信号协方差矩阵是非奇异的。

证明: 首先, 假设 L 是子阵数, K 是相干信号组数, 则:

$$\bar{\mathbf{R}}_s = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathbf{D}^{(i-1)} \mathbf{R}_s \mathbf{D}^{H(i-1)} \quad (23)$$

其可以改写为:

$$\bar{\mathbf{R}}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{D} & \dots & \mathbf{D}^{L-1} \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{L} \mathbf{R}_s \\ & & & \mathbf{D}^{L-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{D} \\ \vdots \\ \mathbf{D}^{L-1} \end{bmatrix}^* \quad (24)$$

也就是:

$$\bar{\mathbf{R}}_s = \mathbf{F}\mathbf{F}^H \quad (25)$$

其中,

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{L}} \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D}\mathbf{C} & \dots & \mathbf{D}^{L-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\mathbf{R}_s = \mathbf{C}\mathbf{C}^H \quad (27)$$

对比式(25)和式(27), 可以看出除了常系数略有差异, \mathbf{C} 与 \mathbf{a} 基本相同, 且无论 $E[|s_1(t)|^2]$ 是否为 1, 都可以将 \mathbf{C} 表示为:

$$\mathbf{C} = c\mathbf{a} = c[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_K]^T \quad (28)$$

其中, c 是一个常系数。

$$c = \sqrt{E[|s_1(t)|^2]} \quad (29)$$

将式和代入式可得:

分解类方法，特别是 MUSIC 算法时的 DOA 估计性能。

首先，考虑 3 个窄带信号以 75°、95° 和 115° 入射到阵列。其中，前两个信号是相干的，另一个信号与前两者相互独立。信噪比 (signal-to-noise, SNR) 为 0dB，快拍数为 1000。仿真使用一个 15 阵元的均匀圆阵构造新阵列结构，其中每个半圆阵各含 8 个天线阵元。假设蒙特卡洛仿真的次数为 100 次。

图 4 为 DOA 估计结果的散点图，表明在使用改进的半圆阵进行 DOA 估计时，即便相干和非相干信号混合在一起，论文所提算法也能取得很好的估计性能。

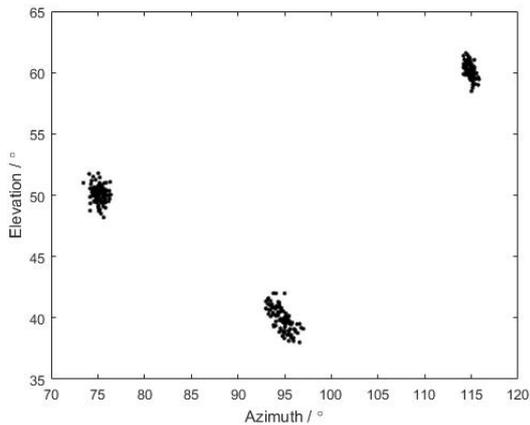


图 4 独立与相干信号混合时 DOA 估计散点图

均方根误差 (root mean square error, RMSE) 可定义如下，它能够反映 DOA 估计算法的性能。

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{r=0}^{R-1} (\hat{\gamma} - \gamma)^2} \quad (53)$$

其中， $\hat{\gamma}$ 和 γ 为第 r 次 DOA 估计值和真值； N 为蒙特卡罗仿真次数。

下面进行蒙特卡罗仿真实验。一个窄带信号从 (80°，50°) 入射至接收阵列，该参考信号经多径反射产生了一个相干的入射信号，入射角为 (95°，40°)。这里，(a, b) 中 a 表示入射信号的方位角， b 表示俯仰角。

在上述条件下，DOA 估计的均方根误差与 SNR 的关系如图 5 所示。这表明使用 MUSIC 方法进行 DOA 估计时，均方根误差随着信噪比的增加而降低，因为当信噪比提高时，噪声对 DOA 估计性能的影响减小了。此外，当信噪比增加时，均方根误差越来越接近克拉美罗界。同样，如图 6 所示，均方根误差也会随着快照的变化而提高或降低。仿真结果表明，论文所提算法在解决相干信号 DOA 估计问题的同时，能够取得良好的估计性能。

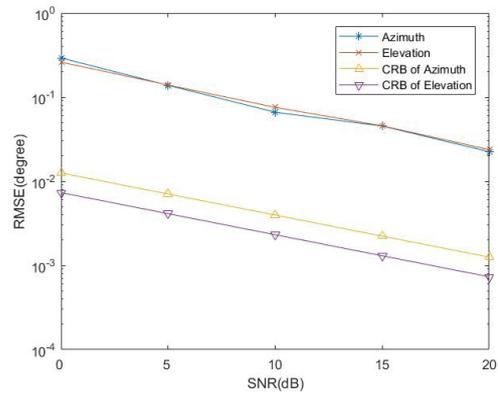


图 5 相干信号条件下均方根误差随信噪比变化图

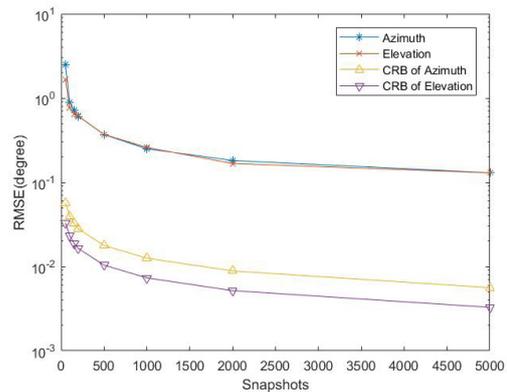


图 6 相干信号条件下均方根误差随快拍数变化图

6 结论

由于多径反射在实际环境中相当常见，在入射信号中存在相干信号时，传统均匀圆阵等均无法正确进行 DOA 估计。而通过将均匀圆阵进行拆分并重新排列，可以很容易地利用改进后的半圆阵，并使用特征分解类算法对相干信号进行 DOA 估计。此外，论文所提基于改进半圆阵的 DOA 估计算法能够在不增加计算复杂度的情况下对相干信号进行 DOA 估计，同时实现接近克拉美罗界的均方根误差性能。

参考文献

- [1] Tie-Jun Shan, Wax, M, Kailath, T. On spatial smoothing for direction-of-arrival estimation of coherent signals[J]. IEEE Trans. acoust. speech Signal Processing, 1985, 33(4):806-811.
- [2] Pillai, S. Unnikrishna, B. H. Kwon. Forward/Backward spatial smoothing techniques for coherent signal Identification[J]. IEEE Trans. acoust. speech Signal Processing, 1989, 37(1):8-15.
- [3] Gonen, E., J. M. Mendel, M. C. Dogan. Applications of cumulants to array processing. IV. Direction finding in coherent signals case[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2002, 45(9):2265-2276.